UNIVERSIDAD DE LOS HEMISFERIOS

FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES Y ECONOMÍA

MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DEL “VALUE AT RISK” PARA PORTAFOLIOS DE INVERSIONES CON TRES ACTIVOS

PROYECTO DE FIN DE CARRERA PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TITULO DE INGENIERO COMERCIAL CON ÉNFASIS EN FINANZAS Y BANCA

RAFAEL KLAIC

DIRECTOR: PATRICIO CÓRDOBA

QUITO, AGOSTO 2014

DECLARACIÓN DE ACEPTACIÓN DE NORMA ÉTICA Y DERECHOS

El presente documento se ciñe a las normas éticas y reglamentarias de la Universidad de Los Hemisferios. Así, declaro que lo contenido en éste ha sido redactado con entera sujeción al respeto de los derechos de autor, citando adecuadamente las fuentes. Por tal motivo, autorizo a la Biblioteca a que haga pública su disponibilidad para lectura, a la vez que cedo los derechos de publicación a la Universidad de Los Hemisferios.

De comprobarse que no cumplí con las estipulaciones éticas, incurriendo en caso de plagio, me someto a las determinaciones que la propia Universidad plantee. Asimismo, no podré disponer del contenido de la presente investigación a menos que eleve por escrito el requerimiento para su evaluación a la Comisión Permanente de la Universidad de Los Hemisferios.

Rafael Klaic

1715968069

A mi madre, extraordinario ser de luz que sentó las bases de mi vida, aquella que me enseñó que siempre estamos donde tenemos que estar para aprender lo que tenemos que aprender. A mi padre, el mejor ejemplo de vida, a quien debo tantas virtudes y conocimientos, de quién seguiré aprendiendo siempre en esta vida.

A mis amigos y amigas y tantas personas hermosas que me acompañaron a lo largo de esta etapa compartiéndolo todo.

A mis queridos profesores, que desde el primer día se abrieron a ser maestros, por haber confiado en mí siempre y haber abierto las puertas y la curiosidad de mi mente.

INDICE

ÍNDICE DE TABLAS Y GRÁFICOS

Tablas

Gráficos

RESUMEN EJECUTIVO

Al hablar de cualquier inversión o análisis financiero es esencial tomar en cuenta dos elementos: el rendimiento y el riesgo. Lo que se busca es tener el mayor rendimiento posible con el menor riesgo, es decir, una optimización de esta relación inversa. El rendimiento es fácilmente cuantificable, el problema aparece cuando se quiere llegar a medir el riesgo. El *Value at Risk* (VaR) es una herramienta de riesgo que se ha popularizado en los últimos años. Esta investigación describe el significado de este concepto y compara las diferentes aproximaciones metodológicas en un portafolio de acciones de Ecuador y otro de acciones de Estados Unidos.

Existen varias aproximaciones metodológicas para el cálculo del VaR, su exactitud depende de los instrumentos financieros analizados y las características estadísticas de sus series. En la presente investigación se utilizó varios métodos de cálculo para los portafolios mencionados: Método Histórico, Paramétrico con distribución normal y “t”, Varianzas y Covarianzas, Montecarlo y Valores Extremos. Los resultados demostraron que el método más acertado para el cálculo del VaR fue el de Valores Extremos por su análisis de colas.

Utilizando los tests de Kupiec y el de Christoffersen con intervalos de confianza se determinó el mejor modelo para calcular el VaR y si sus variaciones extremas se distribuían uniformemente a lo largo del tiempo. Adicionalmente en los resultados se puede ver que la estructura de los rendimientos da información sobre cada portafolio que se puede contrastar con características del mercado local como su estabilidad y profundidad.

INTRODUCCIÓN

El análisis financiero es un tema complejo que requiere metodologías adecuadas para que sea completo y útil. Debido a esta complejidad dada por los diferentes factores (internos y externos) que influyen en ella, su predicción o su proyección es uno de los temas más discutidos (Jorion P. , 1997), (Best, 1998) y (Bank, 1995). Las estimaciones derivadas de un análisis financiero deben ser lo más precisas y apegadas a la realidad para disminuir el riesgo. Lo que se busca es tomar decisiones de inversión de forma óptima y adecuada.

Siempre ha sido de gran interés el conocimiento de indicadores de riesgo que den cierta estabilidad a una cartera financiera y dados varios indicadores se tiene el problema de elegir el más adecuado. Uno de los indicadores de riesgo que ha ido ganando terreno es el *Value at Risk* o valor en riesgo, VaR por sus siglas en inglés, técnica popularizada por JP. Morgan al hacer pública su metodología llamada *RiskMetrics*, basado en la metodología del valor en riesgo.

Formalmente, el VaR se define según Baca como: “La máxima pérdida potencial de una cartera de productos financieros en un periodo de tiempo y nivel de confianza dados.” (Baca, 1997, pág. 24). Este enfoque es muy atractivo y fácil de interpretar pues proporciona, en unidades monetarias, la cantidad de fondos necesarios para cubrir el riesgo de mercado debido a los movimientos en la cartera financiera, además de incorporar los efectos de diversificar en las carteras. La importancia de este indicador ha llegado a tal grado que el Comité de Basilea sobre Supervisión Bancaria anunció en abril de 1995 que los requerimientos de capital para bancos comerciales se debían realizar con base en el VaR.

Durante las últimas décadas se ha hecho hincapié en encontrar nuevas y mejores técnicas para la estimación del VaR, entre las cuales destacan el enfoque de varianzas - covarianzas, la simulación histórica, la simulación Montecarlo, la aproximación mediante distribuciones de valor extremo, entre otras.

A pesar de que los parámetros requeridos para el cálculo del VaR en los distintos enfoques están estandarizados por las entidades supervisoras[1], las instituciones financieras no están obligadas a utilizar un enfoque concreto para estimar el VaR; en otras palabras, las entidades pueden decidir el tipo de enfoque que utilizarán. Algunos autores han concluido que no hay enfoque que sea superior a otro, sino que la elección de éste dependerá sólo de la institución y de la precisión que se desee (Beder, 1995), (Best, 1998) y (Penza & Bansal, 2001)

En la práctica, las instituciones financieras calculan sus modelos VaR basados en registros diarios; sin embargo, no es posible la comparación de las cifras obtenidas, ya que los resultados varían mucho dependiendo del enfoque, el horizonte de tiempo y el nivel de confianza que se usen.

La consolidación de los modelos basados en el Valor en Riesgo ha dado lugar al desarrollo de una gran cantidad de métodos para su estimación. El propósito de este trabajo es presentar algunos métodos, así como el llevar a cabo un análisis mediante una prueba de bondad a cada uno de ellos, en términos de simulaciones basadas en métodos de Montecarlo.

No existe una técnica que sea superior a los restantes métodos. Cada metodología tiene sus ventajas y desventajas dependiendo las características del activo financiero analizado y la precisión que se desee. Se considera de interés en la investigación conocer las capacidades y limitaciones de cada uno de ellos dentro de un portafolio de acciones ecuatorianas y estadounidenses a fin de generar posibles sugerencias de uso.

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar los principales métodos de *Value at Risk* en una cartera de inversiones con tres activos para un portafolio con acciones de Ecuador y otro con acciones de Estados Unidos con fines comparativos. Esto lleva a dos principales objetivos secundarios: el primero es realizar un *backtest*[2] a los modelos para determinar su robustez y obtener información relevante sobre cada mercado; el segundo es determinar las limitaciones planteadas por los modelos en la distribución de rendimientos del portafolio que puedan explicar también el movimiento del mercado de valores.

[1] El Comité de Basilea y la unión Europea exigen que el VaR se estime con un nivel de confianza de 99%, sobre un período de 10 días de negociación utilizando por lo menos un año de series históricas

[2] El *backtest* es una herramienta de comprobación donde se contrasta el resultado teórico y el real primero en el pasado y después con proyecciones.

Tomando esto en cuenta, la pregunta de investigación vendría a ser la siguiente: ¿Qué modelo de *Value at* Risk es el más adecuado para la estimación de la cartera de inversiones en Ecuador y Estados Unidos con más de un activo?

Dada la serie histórica obtenida sobre la variación de los precios de las acciones de las carteras seleccionadas, el modelo más adecuado a utilizar sería el de Valores Extremos, por su buena estimación por máxima verosimilitud dada la cantidad de datos presentes y su distribución de densidad.

Dentro de la carrera de finanzas, el VaR ha demostrado ser una herramienta muy útil para cuantificar el riesgo de mercado y su utilización se ha difundido con gran fuerza entre los intermediarios financieros. El VaR se ha utilizado para establecer los riesgos de liquidez y los riesgos operacionales en las instituciones financieras y es un elemento clave del Comité de Basilea. Los riesgos financieros están relacionados con las posibles pérdidas de los mercados generadas principalmente por movimientos en las variables como: tasas de interés, tipos de cambio, precios de las acciones y de mercancías *commodities* y la exposición a este tipo de riesgos por lo general puede ser optimizada por las instituciones a fin de minimizar su exposición.

Como herramienta en el desarrollo social, el VaR puede ser un elemento útil para minimizar el riesgo. Una crisis financiera puede ser un acontecimiento devastador para una economía, la confianza en el sistema y en los bancos se ve minada por la pérdida de poder adquisitivo, el costo financiero y la incertidumbre. El *Value at Risk* es una herramienta que permite a las empresas o a las instituciones financieras optimizar el riesgo de pérdida y tener el colchón necesario para mitigarla en caso de que esta llegue a pasar. Este indicador se vuelve una referencia de riesgo que nos marca un nivel máximo de exposición bajo el cual se tiene la seguridad con un nivel de confianza dado de que el riesgo financiero puede ser mitigado y no llegar a niveles macro, desencadenando así una crisis donde los principales damnificados son los depositantes y la sociedad.

La investigación se divide en seis capítulos. El primero es el marco teórico donde se detallan los principales conceptos financieros del riesgo y su forma de cálculo. El segundo capítulo habla de los activos financieros más comunes y cómo éstos pueden utilizarse para crear carteras de inversión y optimizarlas. El tercero es una descripción del *Value at Risk*, su importancia, formas de cálculo y derivaciones. El cuarto capítulo define la metodología y describe matemáticamente la obtención del VaR por los diferentes métodos. El quinto capítulo describe y contrasta los resultados obtenidos por los diferentes métodos para los portafolios seleccionados y el último capítulo son las conclusiones y recomendaciones.

MARCO TEÓRICO

1. El riesgo

La medición del riesgo es un problema presente en todos los campos de los negocios, la economía y las finanzas. El hecho de tener factores exógenos, y de cierta aleatoriedad, que pueden influir en las actividades normales de una empresa o en los flujos de un portafolio hace que su medición pase a ser un elemento importante de la estabilidad de un negocio. El concepto de *Value at Risk* no existía hasta finales de 1980, donde los mercados de valores toman una fuerte importancia en la medida del bienestar de una economía. Después de la caída de la bolsa de valores de 1987, una gran cantidad de financieros y académicos que formaban parte de la gerencia de grandes empresas empezaron a preocuparse y a crear instrumentos para la medición del riesgo (Jorion P. , 2006).

Los modelos tradicionales no podían explicar cómo una caída de esa magnitud podía ser posible ya que su probabilidad era tan remota que los modelos probabilísticos no la tomaban en cuenta dentro de su distribución (Mandelbrot & Hudson, 2004)**.** Estos eventos que salen de lo normal o predecible, dieron paso al concepto de *Cisne negro*, un impacto con una clara explicación, pero que dentro de la forma tradicional de ver las cosas era altamente improbable (Taleb, 2007).

El desarrollo de un modelo que pudiera separar de forma sistémica los eventos extremos en un tiempo definido empezó a dar resultados. El VaR como una medida del riesgo tuvo aceptación principalmente porque se creía que al utilizar los datos históricos de largo plazo, los eventos del mercado y tomando en cuenta los movimientos de los precios diarios se podrían predecir los *Cisnes Negros* de Taleb; sin embargo, existe polémica en su aplicación (Kolman, Onak, & all, 1998).

2. Manejo del riesgo y conceptos básicos

"El riesgo es la volatilidad de los flujos financieros no esperados, generalmente derivados del valor de los activos o pasivos" (Jorion P. , 1997, pág. 34). Esta volatilidad por lo general causa pérdidas o fluctuaciones en los ingresos futuros.

Los actores económicos que desarrollan sus actividades en el mercado tienen siempre exposiciones a algún tipo de riesgo. El presente trabajo se centrará principalmente en el riesgo financiero ya que se desea definir un valor en riesgo de un portafolio de inversiones donde el riesgo de negocio y el riesgo estratégico pueden llegar a ser poco cuantificables debido a sus variables operativas, legales o reputacionales.

Las empresas son los actores más importantes del mercado ya que mueven la economía y la dinamizan a través de la competencia. El desarrollo de las actividades de una empresa supone principalmente tres tipos de riesgos, según (Jorion P. , 1997) estos son: riesgo del negocio, riesgos estratégicos y riesgos financieros.

Los riesgos de negocio, también llamados riesgos operacionales u operativos, se relacionan directamente con la pérdida potencial derivada de deficiencias en las actividades en el giro de un negocio; estas actividades podrían ser: deficiencias en los sistemas de información, errores en controles internos, fallas administrativas y todo lo relacionado a errores humanos o tecnológicos dentro de la empresa. Estos pueden ser medidos como un costo de oportunidad, por ejemplo sobre la producción que una máquina no pudo producir por falta de mantenimiento o las ventas perdidas por fallas en el sistema de información que impidió la correcta distribución del producto a los puestos de venta. Dentro de esta clasificación el marco legal es de vital importancia debido a su documentación, legislación y la capacidad de operación.

Los riesgos estratégicos tienen mucha relación con el movimiento del mercado y la posición de la empresa dentro del mismo. Este tipo de riesgo también se los conoce como riesgos de la alta gerencia. Los riesgos estratégicos se dan cuando las decisiones estratégicas de la empresa no terminan adecuándose al movimiento del mercado y generan un desgaste de recursos. Lo mismo puede suceder en cuanto a las decisiones sobre lanzamientos de nuevos productos o estrategias de crecimiento y diversificación.

Los riesgos financieros son aquellos que representan potencialmente una pérdida monetaria. Estos riesgos son los más medidos porque son los más frecuentes; la empresa al no tener control del movimiento de las variables económicas y financieras del mercado (como los diferentes tipos de activos financieros o las propensiones marginales de consumo de la población y su crecimiento), tienden a cuantificarlas y proyectarlas mediante modelos. Este es el caso del Valor en Riesgo (VaR), el modelo CAPM y otros desarrollados para calcular el riesgo financiero.

3. Riesgo según su naturaleza financiera

Los riesgos de naturaleza financiera se relacionan directamente con tres campos (Lara, 2002): el mercado en sí como riesgo de mercado, la interacción con los deudores o acreedores como riesgo de crédito y la capacidad de la empresa para cumplir sus obligaciones a corto plazo o riesgo de liquidez. Cabe mencionar que estos riesgos no siempre son independientes uno de otro sino que tienen cierto grado de correlación, es decir, la incidencia de uno puede desencadenar otro y esto hace que el manejo y gestión de los riesgos financieros sea de gran importancia para el desarrollo normal de la actividad de la empresa (Diz, 2004).

3.1. Riesgo de mercado

El riesgo de mercado se refiere a la posible pérdida financiera derivada de los cambios en el comportamiento de las variables externas a la empresa. Estos cambios pueden ser macroeconómicos como la inflación y tipo de cambio o de condiciones financieras de mercado como la fluctuación de precios o tasas. Estas variaciones se pueden traducir en pérdidas o ganancias para el inversor dependiendo la posición o el sector en el que se encuentre (Marquez, 1996).

El riesgo de mercado se puede medir como la probabilidad de variación de los precios o variables del mercado y el impacto de las mismas en la actividad de la empresa, (Marquez, 1996). Según esto, al riesgo de mercado se lo puede catalogar de la siguiente manera:

3.1.1. Riesgo de precio de mercancías

Está relacionado con la variación de los precios de las mercancías elaboradas o *commodities* y su impacto en la actividad de la empresa. Normalmente estas variaciones se dan por el equilibrio de oferta y demanda donde la empresa puede tener una pérdida o ganancia dependiendo la posición que tenga sobre el bien que cambia de precio. Si la empresa posee producto en una posición larga se verá beneficiada de un aumento del precio y se perjudicará de una disminución del mismo; sin embargo, si mantiene el producto en una posición corta se verá perjudicado con un aumento de precio y beneficiado por una disminución del mismo.

3.1.2. Riesgo de tipo de interés

Este riesgo está relacionado con el movimiento de las tasas de interés en la posición de los activos o pasivos de una empresa. El tipo de interés puede variar por diferentes razones: los movimientos de la tasa de inflación, la calificación de riesgo, los tipos de interés en el exterior, la política monetaria del organismo regulador o la cantidad de dinero en circulación en la economía. Los cambios de interés pueden generar pérdidas cuando son contrarios a la posición de la empresa.

3.1.3. Riesgo de precio de las acciones

El riesgo en el movimiento del precio de las acciones depende directamente de la posición que mantiene la empresa en estos activos. Se relaciona con la probabilidad de variación del rendimiento de una acción a la baja o al alza, donde la pérdida puede verse mitigable gracias a la diversificación, o no mitigable debido a factores fuera del alcance de la empresa como los económicos o de mercado.

3.1.4. Riesgo de tipo de cambio

El tipo de cambio es el precio de una moneda en términos de otra. El riesgo de tipo de cambio es la probabilidad de pérdida frente a la variación del precio de esta moneda (depreciación, apreciación) dada una posición definida o sector en el que opera la empresa. Por ejemplo la devaluación de la moneda local vuelve los productos nacionales más baratos en el exterior, por lo que las empresas exportadoras se benefician con una mayor demanda; por otro lado, si el tipo de cambio se aprecia, el producto nacional será más caro en el exterior y las empresas importadoras serán la beneficiadas. El riesgo de tipo de cambio puede verse principalmente en: las exposiciones contables de una empresa (balances), la exposición económica de sus activos en otras monedas (salarios) y en los registros de transacciones (costos de tipo de cambio).

3.2. Riesgo de crédito

El riesgo de crédito se deriva de la probabilidad de pérdida en la que cae la empresa cuando la contraparte no cumple sus obligaciones financieras. Este riesgo es claro en el negocio de los bancos, pero existen también empresas que pueden verse afectadas por la alta exposición que mantienen en cuentas por cobrar. El riesgo de crédito puede derivar en el riesgo de la posible degradación de la calificación de crédito del deudor y problemas con colaterales y garantías (Elizondo, 2003).

Cuando se analiza el riesgo de crédito se lo puede percibir de dos formas: el riesgo como viabilidad de retorno y el riesgo como probabilidad de pérdida. Cuando el deudor no puede llevar a cabo todos los pagos en el tiempo definido en el contrato debido a que su situación económico-financiera no genera el flujo necesario se habla de un riesgo de viabilidad de retorno ya que existe la incapacidad de generar el flujo suficiente. Cuando existe la probabilidad de que la capacidad de pago de un agente genere pérdidas a otra empresa se habla de riesgo como probabilidad de pérdida. Este riesgo se lo debe administrar desde el punto de vista actual (posición que mantiene en impago) y desde el punto de vista potencial (tomando en cuenta la experiencia se puede determinar el posible riesgo de crédito del deudor y también se analiza el de sus pares en la industria).

El riesgo de crédito puede componerse de los siguientes elementos (Van Horner, 2002):

3.2.1. Exposición crediticia

Es la cantidad de dinero que se encuentra en riesgo gracias al crédito otorgado al deudor. Se puede calcular este riesgo multiplicando la probabilidad de que el deudor no pague por el monto adeudado.

3.2.2. Riesgo de recuperación o mora

Es la probabilidad de que el crédito sea devengado en su totalidad. Para calcularlo se hace un análisis de los flujos de la empresa para ver si ésta genera la suficiente caja como para pagar sus obligaciones financieras.

3.2.3. Capital en riesgo crediticio

Es el capital que se encuentra en riesgo si el deudor no llega a pagar sus obligaciones, es decir, la disminución potencial de patrimonio resultante de la pérdida por el crédito.

3.2.4. Provisión crediticia

Es el porcentaje de dinero que mantiene el acreedor como cobertura frente al impago de la deuda. Este monto se fija tomando en cuenta la probabilidad de impago del deudor o su calificación de crédito como porcentaje del crédito.

3.2.5. Riesgo de garantías

Se refiere al riesgo que supone la calidad de las garantías otorgadas o el nivel de nivel de liquidez de las mismas. Existe un riesgo de garantías por ejemplo cuando los activo otorgados a un banco garantizando un préstamos no están en buen estado y no cubren la pérdida del préstamo o cuando el costoso vender la garantía.

3.3. Riesgo de liquidez

La liquidez es la capacidad que tiene una organización para cumplir sus obligaciones a corto plazo. En otras palabras es la facilidad con la que un activo puede convertirse en efectivo tomando en cuenta la minimización de los costos de conversión. El riesgo de liquidez pasaría a ser la probabilidad de que la empresa no tenga los recursos financieros líquidos necesarios para cubrir sus obligaciones en el corto plazo. Derivado de este riesgo existe la posibilidad de que la empresa incurra en pérdidas por la venta de activos para cubrir sus obligaciones (Baca, 1997).

Dentro del mercado, este riesgo puede ser mitigado con la buena planificación de la liquidez, las políticas de ratios y calces de plazos o las negociaciones de sustitución de deuda gracias a instrumentos financieros como la emisión de obligaciones, titularizaciones o negociaciones con otros bancos y proveedores o inversiones en activos líquidos que pueden ser fácilmente vendidos.

4. Conceptos básicos de riesgo

Popularmente se suele decir que nada gana quien nada arriesga. Esta relación entre el riesgo y la ganancia es fundamental en el análisis de carteras o inversiones. Los dos aspectos fundamentales en el análisis del riesgo son: el riesgo y la rentabilidad esperada. Esta relación se ve determinada por el costo de oportunidad del inversionista que selecciona el nivel de riesgo y genera un perfil de inversiones mediante una curva de aversión al riesgo.

En las inversiones financieras debe existir un equilibrio entre rendimiento y riesgo. Suponiendo que los inversionistas actúan racionalmente, tenderán a elegir un instrumento o un negocio que no genere riesgo y que aporte el mayor rendimiento posible, de esta forma minimizan su incertidumbre y maximiza sus objetivos de rendimiento. Un inversionista no toma riesgos cuando conoce con certeza los rendimientos futuros del activo en el que está invirtiendo, por ejemplo los Bonos del Tesoro de Estados Unidos. Cuando se habla de un rendimiento sin riesgo, se refiere a una *tasa libre de riesgo* que puede pasar a ser el referente del costo de oportunidad de las inversiones que realiza un inversionista frente al rendimiento esperado.

La tasa de rendimiento requerida por el inversionista será entonces la tasa libre de riesgo más una prima de riesgo que define cada individuo basado en su apetito de riesgo:

$$K_j = r_f + \theta \tag{1}$$

Donde K_j es la tasa de rendimiento requerida, r_f la tasa libre de riesgo y θ la prima de riesgo. La prima de riesgo debe ser lo suficientemente alta como para cubrir el riesgo de plazo o vencimiento, el riesgo de crédito o incumplimiento y el riego de liquidez.

La relación entre el riesgo y el rendimiento difiere de un activo a otro debido a su estructura. Esta relación no siempre es lineal, pero para su análisis se considera que el crecimiento del riesgo genera un cambio proporcional en el rendimiento. Por ejemplo: si se define el eje *x* como riesgo y el eje *y* como rendimiento, los bonos del tesoro de Estados Unidos serían el cruce con el eje *y* generando así un piso de rendimiento, a partir de este piso se encontrarían otros activos financieros como: los bonos corporativos, las acciones preferentes, los bonos chatarra, las acciones comunes y las acciones especulativas. Esta relación da a entender que la naturaleza del activo financiero está asociada a un nivel de rendimiento y riesgo.

4.1. Rendimiento

El rendimiento de un activo pasa a ser el cambio de valor que sufre el mismo en un período de tiempo. El caso más común de rendimiento es el incremento de los precios de un bien o una acción por ejemplo, donde la ganancia se mide como el incremento porcentual que sufrió el activo en determinado período de tiempo (Gujarati & Porter, 2010).

El rendimiento es una valoración estadística de la variación del valor de un activo. Si se quiere obtener el rendimiento de una acción de un período *t-1* a un período t según la metodología descrita en (Gujarati & Porter, 2010) es la siguiente:

$$R_{t-1}^{t} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (2)$$

El rendimiento de la acción sería el precio de la acción en el año *t* menos el precio en el año *t-1* dividido para el precio en el año *t-1.* Así como existen cambios en el precio de la acción que determinan el rendimiento, también se pueden tener ocasiones donde además del cambio en el precio existió un pago intermedio D_t, en este caso, el pago intermedio pasaría a formar parte del rendimiento aritmético de la siguiente manera:

$$R_{t-1}^{t} = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}} \quad (3)$$

El rendimiento aritmético es un concepto elemental en el análisis financiero; sin embargo, cuando se desea modelar el rendimiento y ajustar los datos a un modelo econométrico es mejor utilizar el rendimiento geométrico. Esto se debe a que los datos transformados en logaritmos suavizan la serie y podrían ser más significativos que los rendimientos aritméticos, además de la ventaja de no tener nunca valores negativos.

El rendimiento geométrico tiene la siguiente forma (Gujarati & Porter, 2010):

$$Rg_{t-1}^{t} = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (4)$$

Si se toma en cuenta los pagos intermedios D_t, el rendimiento geométrico mantiene la misma lógica:

$$Rg_{t-1}^{t} = \ln\left(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}\right) \quad (5)$$

Matemáticamente se puede demostrar que la diferencia entre utilizar rendimientos aritméticos y geométricos es mínima cuando los valores son bajos. En este caso, al estudiar rendimientos diarios o semanales, los rendimientos no serán muy elevados, por lo que traería mayores beneficios utilizar un método geométrico.

4.2. Volatilidad o variabilidad

La volatilidad o variabilidad es un indicador que pretende cuantificar los cambios y sus magnitudes dentro de una serie de datos. Cuando se habla de una alta volatilidad se dice que una serie de datos tiene cambios bruscos a lo largo de ésta y hace difícil predecir cuál será el próximo valor de la serie. Este grado de incertidumbre derivado de la volatilidad de los datos se puede relacionar directamente con el riesgo. En el mercado de acciones la tendencia normal es que la volatilidad varíe más que proporcionalmente. Cuando los rendimientos aumentan, éstos tienden a sufrir subidas bajas pero constantes; sin embargo, cuando existe una crisis y los rendimientos bajan se observan movimientos más bruscos.

La medida más utilizada para la medición de la volatilidad es la desviación estándar. La desviación estándar es un parámetro estadístico de la dispersión de los datos con respecto a la media; entre mayor es ésta, la serie tendrá mayor volatilidad. La desviación estándar se define como la raíz cuadrada de la varianza. Para el cálculo de la varianza se necesita tener el promedio de la serie de datos ya que se está analizando una medida de dispersión con respecto a la media o promedio. El promedio (también llamado primer momento) se define como (Gujarati & Porter, 2010):

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i \qquad (6)$$

Donde μ es el promedio, n el número de datos y R_i la serie de rendimientos. Teniendo en cuenta esto se puede pasar el segundo momento o varianza:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \mu)^2 \qquad (7)$$

La desviación estándar pasaría a ser la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \qquad (8)$$

Teniendo claros los conceptos de rendimiento y volatilidad se puede entender matemáticamente la relación que existe entre el riesgo y la rentabilidad.

4.3. Rendimiento y volatilidad esperada probabilística

El rendimiento esperado es el promedio de una serie de rendimientos; sin embargo, hay casos donde el rendimiento depende de probabilidades ya que se toma en cuenta varios escenarios. El rendimiento esperado probabilístico es una valoración estadística del valor medio o el promedio de los posibles resultados donde los ponderadores son las probabilidades de ocurrencia. El rendimiento probabilístico esperado toma normalmente tres tipos de escenarios: el optimista, el moderado y el pesimista. La multiplicación del rendimiento optimista por su probabilidad de ocurrencia da como resultado un valor que, sumado a la misma operación realizada al moderado y al pesimista da un rendimiento esperado que pasaría a ser un promedio ponderado.

$$R_i = \sum_i^n r_i * p_i \tag{9}$$

Donde r_i representa el rendimiento y p_i es la probabilidad de que ese rendimiento se dé bajo determinado escenario. Siguiendo la misma lógica que se siguió para encontrar la desviación estándar normal, se puede encontrar la desviación estándar probabilística de la siguiente manera:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_i - \mu)^2 * p_i} \tag{10}$$

ACTIVOS FINANCIEROS Y PORTAFOLIOS

Los inversionistas deben tener muy en cuenta el tipo de instrumento de inversión que van a utilizar. Existen varios activos financieros en los cuales se puede invertir y conformar un portafolio. La elección del tipo de activo dependerá del nivel de rendimiento deseado y la aversión al riesgo. A continuación se explicarán los activos financieros más comunes y la estructuración de un portafolio.

1. Activos financieros

Los instrumentos financieros son el resultado del proceso de financiación. Dentro del mercado existen agentes deficitarios que requieren financiación para poder realizar las transacciones que necesitan, y agentes superavitarios que tienen más ingresos que gastos, es decir, generan un excedente de liquidez y consecuentemente buscan mecanismos de colocación. Para cubrir estas necesidades el mercado ha creado instrumentos como: cuentas de ahorro, cuentas corrientes, inversiones financieras, fondos de pensiones o inversiones en fondos mutuos, entre otras. Las necesidades de relación de financiamiento entre los agentes de mercado han creado los llamados activos financieros, que son los que permiten el proceso de financiación, éstos pueden ser préstamos, emisiones de obligaciones o acciones, entre otros. Los agentes de este proceso pueden ser personas naturales, empresas privadas, gobiernos, municipios o el resto del mundo, quienes interactúan en un mercado mediante la emisión y compra de activos financieros (Van Horner, 2002).

Los activos financieros pueden definirse en dos categorías: de acuerdo al tipo de renta y de acuerdo al emisor (Gonzales, 2003).

1.1. De acuerdo al tipo de renta

Los valores de acuerdo al tipo de renta definidos en (Gonzales, 2003) son dos: de renta fija y de renta variable. Existen dos conceptos clave en este sentido, el interés y la prima. El interés es el costo del dinero que se paga o se recibe por prestar o invertirlo y la prima es el descuento resultado de una operación de compra o venta generalmente relacionado a la liquidez. Cada uno tiene una estructura que se explicará a continuación.

1.1.1. Valores de renta fija

Son valores vistos como deuda donde se sabe cuál es su rendimiento y por lo tanto, al momento del acuerdo, se los puede negociar con descuentos en el precio. Para poder saber la rentabilidad de estos valores, se utilizan dos herramientas. En la primera se puede observar el valor que tienen los intereses ganados o que se van a ganar según la tasa a la que se colocó al momento de la declaración y el plazo que se dio. En la segunda el descuento o prima que se adquiera en el precio de negociación.

Estos valores se pueden clasificar en valores de corto plazo con tasa de interés o sin tasa de interés, valores a la vista y valores a largo plazo. Los valores con tasa de interés pueden ser: pagarés, pólizas de acumulación, certificados de depósito, certificados de inversión, certificados de ahorro o certificados financieros. Los valores sin tasa de interés pueden ser: cupones, letras de cambio, cartas de crédito doméstico, aceptaciones bancarias, certificados de tesorería, títulos del Banco Central (TBC).

Los valores a la vista son valores que no tienen plazo ni rendimientos, por lo que los negocia simplemente por su precio. Los valores de largo plazo son valores de deuda, su vigencia es mayor a trescientos sesenta días, y tienen una tasa de interés. Los más importantes son: cédulas hipotecarias, bonos del estado, obligaciones y valores producto de procesos de titularización.

1.1.2. Valores de renta variable

Este tipo de valores tienen una naturaleza de tipo patrimonial. Es por esto, que no se puede conocer su rendimiento al momento del acuerdo y no tiene una tasa de interés. Se lo determina por los factores que ayudan a obtener utilidades. Los más importantes son: acciones, cuotas de participación, valores producto de procesos de titularización.

1.2. De acuerdo al sector de emisión

La clasificación entre el tipo de instrumento financiero y el sector de emisión se da debido a que las instituciones que buscan fondeo tienen características muy diferentes unas de otras, por lo que los instrumentos utilizados siempre tienden a ser diferentes ajustándose así a las necesidades del mercado (Gonzales, 2003). La clasificación de acuerdo al sector de emisión descrito por Gonzales se detalla a continuación.

1.2.1. Valores emitidos por el sector público

Estos valores representan una deuda y son emitidos por parte del Estado e instituciones del sector público. Forman parte de la política monetaria, ya que son utilizados principalmente para proyectos públicos que están en desarrollo o para cubrir gastos de tesorería. Estas actividades deben ser acompañadas de leyes que autorizan su emisión. Los más importantes son: bonos del estado, títulos del Banco Central (TBC) y certificados de tesorería.

1.2.2. Valores emitidos por el sector privado

Este tipo de valores son de deuda o patrimoniales. Son normalmente emitidos por una persona jurídica privada. Se dan por operación de crédito o comercial y también puede ser emitidos con el propósito de tener recursos financieros de manera directa. Los más importantes son: acciones, aceptaciones bancarias, cartas de crédito doméstico, cédulas hipotecarias, certificados de depósito, certificados de ahorro, certificados financieros, certificados de inversión, cuotas de participación, cupones, obligaciones, obligaciones convertibles en acciones, pagarés, papel comercial, pólizas de acumulación, valores producto de procesos de titularización.

2. Descripción de los principales activos financieros

Existe una gran cantidad de activos financieros. Estos pueden constituir el núcleo de un negocio como en una administradora de fondos o pasar a ser un instrumento de fondeo para otras. A pesar de su variedad, se puede definir algunos instrumentos como activos principales. Los activos detallados en (Gonzales, 2003), son los siguientes.

2.1. Acciones

Las acciones son las partes en las que se divide de manera igualitaria al capital de una organización. Existen dos tipos de acciones, las ordinarias y las preferidas. Las acciones preferidas se diferencian en el derecho al pago preferente de dividendos antes que las acciones ordinarias. Para poder determinar el rendimiento de una acción, ésta depende mucho en la cantidad de ganancia anual que tenga la organización. De esta manera, se reparte únicamente el beneficio líquido. Es por esto que las acciones no garantizan un rendimiento fijo. Sin embargo, existen derivaciones de las mismas que pueden dotar de cierta preferencia o de derecho a dividendos, pero no a votos.

2.2. Bonos

Los bonos son creados por instituciones privadas o países y sirven para conseguir financiamiento para sus proyectos. Para la emisión de estos papeles, es necesaria la aceptación del directorio del Banco Central. Tiene plazos mayores a un año, y la amortización e intereses van a cargo de la institución. Los bonos son negociados directamente por parte de la institución con los inversionistas. Pueden ser negociados en la bolsa de valores. Existen también bonos de gobiernos que cumplen el mismo fin pero son emitidos a través del Ministerio de Economía y Finanzas.

2.3. Obligaciones

Son valores que permiten obtener recursos del público para financiar cualquier actividad que genere retribución, las empresas suelen hacer uso de estos valores para financiarse. Estos documentos registran una deuda existente que reconoce interés y retribución de su capital al que obtenga este valor, para esto el mismo contiene cupones para hacer efectivo el cobro de los mismos, éstas pueden ser llamadas también papel comercial al corto plazo. Existen obligaciones que al fin de su vida pueden ser convertidos en acciones o acciones preferentes sobre la base de un acuerdo.

2.4. Titularizaciones

Son títulos valores que reciben los flujos de un determinado activo y pueden ser de renta fija o variable. Su característica es la construcción de un patrimonio autónomo normalmente bajo la figura de un fideicomiso para garantizar y administrar el pago de los valores emitidos. Las titularizaciones se las puede realizar sobre activos o sobre flujos futuros como una forma de financiación.

2.5. Pólizas de acumulación

Son títulos que se emiten con el objetivo de a su vencimiento cobrar un monto de dinero en un corto plazo con renta fija; lo emiten bancos o sociedades financieras, el valor es inamovible dentro del plazo estipulado por el emisor y el cliente.

2.6. Cédulas hipotecarias

Las cédulas hipotecarias son un derecho económico de poder percibir una renta periódica, fija o variable. Hay derecho a reembolso del capital determinado. Las cédulas hipotecarias pueden ser emitidas por: bancos, mutualistas, cooperativas de ahorro y crédito y sociedades financieras.

2.7. Títulos del Banco Central

Los títulos del Banco Central son valores para regularizar la liquidez de la economía. No crean un interés fijo, ya que su rendimiento se da por el descuento que se entrega al momento de las negociaciones. El Banco Central, tiene el poder de determinar montos, plazos, rendimientos y más condiciones. Al momento del vencimiento, los TBC son redimidos a la par en las oficinas del Banco Central.

2.8. Avales y aceptaciones bancarias

Los avales bancarios son letras de cambio en los cuales intervienen tres partes. En primer lugar, el deudor, el cual es el que se compromete a pagar en un tiempo determinado. En segundo lugar, el avalista, mejor conocido como el garante y finalmente el acreedor, quien recibe el pago. Cuando la letra de cambio está autorizada por un banco, se llama aval bancario. Las aceptaciones bancarias son simplemente las letras de cambios o pagarés que son realizados por los clientes bancarios y que por lo tanto deben ser aprobadas por el banco.

2.9. Derivados financieros

Son contratos de naturaleza financiera cuyo cumplimiento se debe realizar a futuro. Cada derivado tiene sus características estructurales y sus condiciones donde el valor de este instrumento se fundamenta en otros activos financieros (activo subyacente) que pueden ser monedas, tasas de interés, acciones, *commodities*, etc. Estos derivados son principalmente derechos de cobro o de pago y los más populares son: futuros[3], *forwards*[4], opciones[5] y *swaps*[6].

3. Portafolios de inversiones

Un portafolio o cartera de inversiones es la agrupación de varios activos dentro de una sola canasta de inversiones, es decir, la agrupación de varias acciones, futuros u otro tipo de instrumentos financieros como conjunto. En el portafolio de inversiones se puede tener solo acciones, sólo bonos u otros instrumentos o se puede mezclar los diferentes tipos de instrumentos para crear una cartera más compleja. El análisis de portafolios no es tan simple como el de un solo activo, principalmente por la naturaleza de los activos escogidos y por la relación que cada activo puede tener marginalmente sobre el rendimiento final del portafolio.

El objetivo de construir un portafolio de inversiones es crear diversificación. La diversificación mitiga en cierto grado el riesgo cuando el portafolio está compuesto por activos que compensan las pérdidas y ganancias. Por ejemplo: si se tiene US$ 10.000 en un solo activo y éste cae en 10%, se tendrá al final una sola pérdida de US$ 1.000; por el contrario si se tiene dos activos: uno que baja 10% y otro que sube 8%, se tendrá una pérdida de solo US$ 200 con el mismo capital de US$ 10.000 . Si bien la diversificación puede ayudar a mitigar el riesgo de pérdida, también limita las ganancias. En el ejemplo anterior, si se suponen ganancias en vez de pérdidas, se encontrará que la inversión en un portafolio diversificado hará ganar US$ 200 en vez de US$1.000.

Si se busca optimizar el rendimiento reduciendo el riesgo, se tiene que encontrar un portafolio con la correcta relación de activos que pueda hacerlo posible; esta particularidad se verá más adelante en la optimización de portafolios.

Los momentos que se encontraron anteriormente (media y desviación estándar) se pueden calcular también para los activos de un portafolio. Estos momentos son un poco más complejos de calcular ya que se utilizan matrices. Se pueden definir a un portafolio como

---

[3] Contrato que obliga a las partes a comprar o vender un número determinado de valores (activo subyacente) en una fecha futura a un precio establecido y se tranzan en mercados organizados (Park, 2009).
[4] Son contratos parecidos a los futuros pero el *forward* se comercia en mercados no organizados, es decir, *over the counter* (Park, 2009).
[5] Son contratos donde se paga una prima para tener la opción de comprar o vender cierto activo a un precio determinado en un período de tiempo (Park, 2009)**.**
[6] Son contratos de permuta financiera donde las partes se comprometen a intercambiar una cantidad de dinero a futuro relacionada con una tasa de interés (Park, 2009).

una función lineal de sus elementos (Gujarati & Porter, 2010) por lo que el rendimiento podría definirse como:

$$R_p = w_1R_1 + w_2R_2 + w_3R_3 + \ \dots\ w_nR_n \qquad (11)$$

Donde w_i es el peso del activo *i* dentro del portafolio. De forma general el rendimiento del portafolio quedaría de la siguiente manera:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_iR_i \qquad (12)$$

Matricialmente:

$$R_p = w'R \qquad (13)$$

Donde *n* es el número de activos, w' es la matriz traspuesta de las ponderaciones y *R* es la matriz de rendimientos de los activos del portafolio. Para encontrar la desviación estándar se debe obtener la matriz de varianzas y covarianzas del portafolio:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \sigma_{12} & . & . & . & \sigma_{1k} \\ \sigma_{21}\sigma_2^2 & . & . & . & \sigma_{2k} \\ . & . & . & & . \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ \sigma_{k1}\sigma_{k2} & . & . & . & \sigma_k^2 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Y puede calcularse como:

$$\Sigma = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_i)(x_i - \mu_i)' \qquad (15)$$

Con la matriz de varianzas y covarianzas, la varianza y la desviación estándar del portafolio pasaría a ser:

$$\sigma^2 = w'\Sigma\, w \qquad (16)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \qquad (17)$$

3.1. Matriz de correlaciones

La correlación indica la fuerza y relación entre dos variables de una forma lineal y proporcional. Se dice que una variable se correlaciona con otra cuando sus comportamientos son proporcionales, es decir, cuando una variable cambia, la otra también lo hace en el mismo sentido o en sentido inverso. Esta direccionalidad le da la relación a la correlación: si es positiva, las dos variables se mueven en el mismo sentido, si es negativa, la relación es inversa (Gujarati & Porter, 2010).

La matriz de correlaciones es una matriz cuadrada con diagonal de números uno:

$$C_r = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & . & . & . & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & . & . & . & r_{2k} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ r_{k1} & r_{k2} & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Si se llama D a la matriz diagonal de orden *k*, que se construye con las desviaciones estándar de las variables como diagonal, la matriz de correlaciones C_r se relaciona con la matriz de covarianzas de la siguiente manera:

$$C_r = D^{-1} \Sigma D^{-1} \tag{19}$$

Donde D^{-1} es la matriz inversa definida como una diagonal de orden *k* con las desviaciones estándar de las variables.

Teniendo en cuenta estos conceptos básicos de relación entre variables, se puede llegar a calcular el *Value at Risk* de una cartera de inversiones.

4. Optimización de portafolios

Existen varios factores que un inversor toma en cuenta al momento de estructurar un portafolio de inversiones. Lo que todo inversionista busca es tener la mayor ganancia con una mínima incertidumbre. Dado que los rendimientos de los activos o los movimientos del mercado vienen fijados por muchos factores que están más allá de nuestro control, el análisis más simple y práctico dentro de las finanzas es utilizar sólo los datos de las variables analizadas en vez de buscar aquellas variables independientes que influyen sobre el activo en estudio.

El problema en la selección de activos para conformar un portafolio radica en la incertidumbre y los objetivos del inversionista. Si un inversionista pone todo su capital en un solo activo como una acción, su rentabilidad total dependerá de las variaciones de esta única acción, por lo tanto puede tener una alta ganancia o, por el contrario, una fuerte pérdida. Si invierte su capital en dos acciones diferentes, pero que mantienen la misma tendencia, le sucederá casi lo mismo con un leve factor de suavización. Por esta razón los inversionistas por racionalidad buscarán diversificar sus activos para cubrir las pérdidas de uno con las ganancias de otro y así minimizar la incertidumbre. El problema de la estructuración del portafolio se da entonces cuando el inversionista no sabe en qué proporción debe invertir en un activo u otro para conformar un portafolio óptimo.

La optimización está definida por el riesgo de los activos evaluados (Markowitz, 1987). Markowitz habla de la existencia principal de dos tipos de riesgo que se deben considerar en un portafolio: el riesgo sistemático y el no sistemático. Los precios de las acciones pueden llegar a variar de forma impredecible a lo largo del tiempo, el riesgo sistemático está asociado a los cambios en la economía y sus factores internos como modificaciones en las políticas, golpes de estado, guerras, etc. Este riesgo no es mitigable ni medible y trae consecuencias reales en el rendimiento y volatilidad de los activos financieros ya que no es diversificable. El segundo riesgo es el riesgo no sistemático, éste depende de los factores internos de la empresa como las huelgas, competencia, cambios tecnológicos, etc. Estos factores al ser intrínsecos de la empresa pueden ser mitigados invirtiendo en otras empresas que no les suceda lo mismo, por lo que convierte este riesgo en algo diversificable. Muchas veces el riesgo sistemático puede ser medido sobre la base de indicadores como el Riesgo País o por *Swaps* como el *Credit Default Swap* (CDS), y el no sistemático sobre la base de la calificación crediticia de la empresa.

El nivel de diversificación de portafolio disminuye su riesgo no sistémico, es decir, a medida que incrementan la variedad de activos dentro de un portafolio el riesgo va disminuyendo. Por ejemplo: para el caso de las acciones, el riesgo se minimiza si se elige entre 15 y 20 acciones de forma aleatoria ya que cerca del 30% se debe a causas sistémicas no diversificables (Evans & Archer, 1968).

4.1. Modelo de selección de un portafolio

El modelo de selección de un portafolio óptimo ha sido un problema para los inversionistas debido a la incertidumbre y la cantidad de factores que pueden influir en el rendimiento de un activo financiero. Algunos matemáticos han incursionado en este campo proponiendo soluciones racionales y prácticas a este problema de optimización. El pionero fue Harry Markowitz en 1952, después del cual lo sucedieron varios otros como Fama y Miller, Tobin y en cuanto al modelo CAPM, Sharpe, Lintner, y Mossin. Existen varios métodos para la selección de cartera; sin embargo, todos nacen del mismo principio de Markowitz que llega a completarse con el modelo CAPM. El modelo de mercado de Sharpe y el modelo de carteras mixtas y la CLM (*Capital Market Line*) son válidos para el análisis de portafolios, pero para efectos del presente estudio se explicarán los dos más importantes y utilizados: el modelo de Markowitz y el CAPM.

4.1.1. Modelo de optimización de Markowitz

La teoría de portafolios eficientes (Markowitz, 1987) se basa en la selección de los diferentes tipos de activos buscando dos objetivos principales: la diversificación del riesgo y la optimización del rendimiento. Se sabe que a un mayor nivel de riesgo se tendrá un mayor retorno a causa de la incertidumbre y el costo de oportunidad implícito, esto ya lo tenía en cuenta Markowitz y Schwert (Schwert, 1989) y lo siguen demostrando otros estudios de comportamiento de mercado (Garriaga, 2006). Dentro de una combinación de activos o títulos individuales se pueden encontrar: acciones, bonos, derivados financieros, entre otros. El objetivo de esta combinación es minimizar el riesgo y maximizar la rentabilidad esperada cuya relación matemática viene dada por la desviación estándar y la media de los rendimientos. El premio Nobel de economía Harry Markowitz defendía que la teoría de generación de una cartera óptima no se daba simplemente por la combinación deseable entre el riesgo y las ganancias de los activos, sino que la diversificación era una herramienta útil que generaba un beneficio a los inversionistas dependiendo su perfil de aversión al riesgo mediante fronteras eficientes de carteras óptimas.

Para la construcción del modelo de Markowitz se tienen principalmente dos criterios. El primero es la medición del rendimiento en función de la ganancia esperada (media) y el segundo es medir el riesgo en función de la variabilidad (varianza)

La principal meta de la teoría de cartera es la optimización de la asignación de pesos de los distintos activos dentro de una cartera definida para maximizar los rendimientos minimizando el riesgo. Pero existía una limitación dentro de este modelo, y es que la diversificación presentaba un infinito número de posibilidades de carteras, por lo que Markowitz tuvo que plantear tres supuestos básicos que limiten esas posibilidades a una frontera eficiente. El intercambio entre el riesgo y la rentabilidad es una función creciente que puede ser optimizada mediante el método de Media-Varianza; este método se realiza mediante una determinación de una frontera eficiente, es decir, la mezcla concreta de activos que minimizan el riesgo para un nivel de ganancia definida. Este proceso de optimización está atado a varias condiciones:

- Las ganancias esperadas y las varianzas deben estar dentro de un rango finito.
- Los activos no deben tener la misma ganancia.
- La matriz de covarianza debe ser positiva.

Para la toma de decisiones se compara los activos con un activo libre de riesgo que determinará una tasa mínima de riesgo cero que es la tasa libre de riesgo. Matemáticamente dentro de una función esta tasa pasaría a ser el intercepto con eje de las *y*.

4.1.2. Modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model)

El modelo CAPM (por sus siglas en inglés *Capital Asset Pricing Model*) fue desarrollado por Sharpe, Lintner y Mossin (Sharpe, 1964), (Lintner, 1965) y (Mossin, 1966). El modelo busca valorar activos bajo el principal supuesto de que el único riesgo al que se enfrenta el inversionista es la incertidumbre sobre el precio futuro del activo en el que desea invertir. Reduciendo todo el modelo a este supuesto básico se diferencian otros supuestos principales para correr el modelo como:

- Los inversionistas se comportan de acuerdo al modelo de media-varianza compuesto por Markowitz; es decir, buscan maximizar la rentabilidad y minimizar el riesgo.
- Las inversiones deben tener el mismo horizonte temporal.
- Existe un mercado eficiente que brinda información simétrica.
- Existe las posibilidades de vender a corto y hay como endeudarse a la tasa libre de riesgo.
- No se toman en cuenta impuestos y comisiones.
- Existe una competencia perfecta por lo que no se puede influir en el precio de los activos.
- El intercambio de activos se lleva a cabo constantemente en el tiempo.

El objetivo del modelo es estimar la rentabilidad de cada activo en base a su riesgo y definir un indicador que permita estimar de manera eficiente el mercado. El modelo no toma en cuenta el riesgo específico o no sistemático ya que éste puede verse mitigado por efectos de la diversificación. El CAPM utiliza una línea de mercado de valores (LMV) que es la relación lineal entre el riesgo y la rentabilidad, esta relación de mercado mantiene una pendiente β que pasa a ser el indicador de la sensibilidad del activo y el mercado. La metodología definida en (Sharpe, 1964) es la siguiente:

$$E_p = R_f + \frac{E_m - R_f}{\sigma_M^2}\sigma_{P,M} \tag{20}$$

Donde la rentabilidad esperada del activo o portafolio E_p está dada por una tasa libre de riesgo R_f la varianza del merado σ_M^2 y la covarianza entre el mercado y el activo $\sigma_{P,M}$. La relación entre la rentabilidad esperada y el covarianza del mercado y el activo indica que el activo analizado está relacionado directamente con el riesgo del sistema. Lo que busca el CAPM es el rendimiento esperado del activo en función de su riesgo sistémico. La recta de mercado o LMV ayuda a encontrar el portafolio óptimo cuando la curva de posibilidades de inversión la topa en un punto tangencial.

El concepto más importante que introduce el modelo CAPM es el coeficiente del mercado o β, esta nace de la relación entre el riesgo sistemático y el riesgo de mercado:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{P,M}}{\sigma_M^2} \tag{21}$$

Es decir: la covarianza del activo con el mercado dividido para la varianza del mercado. La relación que se encuentra en este coeficiente es una relación de volatilidad de la rentabilidad del activo frente a la del mercado. Si el coeficiente pasa a ser 0 entonces la rentabilidad del activo será la misma que la de la tasa libre de riesgo; si el coeficiente es 1 entonces la rentabilidad del activo financiero será la misma que la del mercado; si toma un valor inferior a 1 significa que la rentabilidad del activo tendrá una rentabilidad inferior a la del mercado y si es mayor a 1 la rentabilidad será mayor.

Este concepto ayuda a entender la relación de rentabilidad del activo frente al mercado, pero también la proporción del riesgo que se toma, ya que de la misma manera el coeficiente define ganancias y pérdidas. Con un β mayor a 1 se tendrá una mayor ganancia que la del mercado cuando el mercado gane y una mayor pérdida cuando el mercado pierda. La elección de los activos por su β se dará por la aversión al riesgo.

Para estimar la β del portafolio, según Sharpe se debe realizar una estimación utilizando las β de los activos individuales que la componen de la siguiente manera:

$$\beta_p = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + X_3\beta_3 + \cdots + X_n\beta_n \tag{22}$$

Por lo tanto la ecuación para cualquier cartera en la LMV será:

$$E_p = R_f + (E_M - R_f)\beta_p \tag{23}$$

Esta metodología puede ser de ayuda para calcular el retorno esperado de una cartera de inversiones o activos con respecto al retorno del mercado. El método es muy utilizado para fijar precios o valorar activos descontando los flujos futuros de la inversión o negocio a la tasa de rendimiento encontrada. Si el valor descontado a esta tasa es mayor al del mercado, entonces se dice que el activo está subestimado; si es menor, se dice que el activo está sobreestimado.

VALUE AT RISK

Formalmente, el VaR podría definirse como: “La máxima pérdida esperada en un período de tiempo y con un nivel de confianza dado por una distribución normal de probabilidades bajo un escenario normal de mercado” (Jorrion, 2000), esto quiere decir que la herramienta estadística utilizada en este trabajo mide el valor que está en riesgo tomando en cuenta el riesgo de mercado medido por la volatilidad de los rendimientos dentro de un portafolio. Cabe recalcar que el VaR no es un indicador de las pérdidas máximas que podría tener la inversión, sino que mide un nivel de pérdidas que se presentan con cierta frecuencia debido a la volatilidad de los rendimientos.

La definición del VaR entraría en el campo de la estadística como la pérdida dada en situaciones extremas en un horizonte de tiempo determinado bajo una distribución de probabilidad. Esta herramienta financiera fue desarrollada por un pequeño grupo de financieros y académicos para medir el riesgo de forma simple y objetiva (Best, 1998), (Dowd, 1998) y (Penza & Bansal, 2001). Linsmeier y Pearson lo definieron en 1996 como el resumen de las posibles pérdidas de un portafolio (Linsmeier & Pearson, 1996). El VaR fue una herramienta utilizada por pocos y no fue muy desarrollado hasta 1996 cuando J.P Morgan publicó su método de medición del VaR con los supuestos y parámetros básicos con los que medía el riesgo a través de *RiskMetrics* (J.P.Morgan, 1996).

Esta herramienta tuvo mucha aceptación por parte de las instituciones y organismos de control. En 1997 la Comisión de Valores de Estados Unidos dictó que las empresas públicas debían publicar la información sobre sus derivados y un análisis de *Value at Risk* en las notas de sus estados financieros. Más adelante, el Acuerdo de Basilea II de 1999 dio un nuevo impulso al VaR como la medida de riesgo de mercado que dictaba que los bancos debían ser capaces de cubrir las pérdidas en sus portafolios sobre un horizonte de 10 días con un nivel de confianza del 99%.

La teoría del portafolio define que los inversionistas eligen sus portafolios basándose en dos elementos claves: el rendimiento y el riesgo; matemáticamente hablando estos elementos pasarían a ser la media y la desviación estándar. El objetivo del análisis de portafolio es siempre el de maximizar los rendimientos y minimizar el riesgo, es decir, maximizar el rendimiento con una desviación estándar dada o minimizar la desviación estándar con un rendimiento dado. Pero existe un contraste entre la teoría de carteras y el VaR (Dowd, 1998):

- Las decisiones de manejo y cobertura que provee el VaR son mejores que la teoría del portafolio por ser un instrumento simple, sin mayores supuestos y su resultado es un solo número práctico.
- La teoría del portafolio toma en cuenta los riesgos de la variación de precios y el rendimiento mientras que el VaR tiene aplicaciones más amplias como la medición de riesgos de liquidez y crédito.
- La teoría de portafolio interpreta el riesgo como la desviación estándar del rendimiento, mientras que el VaR lo interpreta como el valor de pérdida máximo probable.

El VaR tiene una relación interesante en la práctica con los modelos de opciones. Esta explicación viene dada por la estimación del Valor Presente Neto (VPN). Para cualquier proyecto se podría calcular el VPN esperado y la desviación estándar de dicho flujo (Blanck & Tarquin, 1996). Tomando en cuenta el teorema del límite central, donde una variable y puede ser calculada por la sumatoria de n variables aleatorias independientes, si n tiende a infinito, la distribución de probabilidad tenderá a ser normal (Jorion P. , 2004). Por lo tanto, si se tiene las funciones de distribución de los flujos se puede obtener el comportamiento probabilístico del VPN. Esto da una idea de cómo el modelamiento del VaR puede ser muy similar al modelamiento de los activos financieros que dependen de una distribución de probabilidad por lo que los resultados no estarán lejos de la realidad.

Si se utiliza un modelo paramétrico, asumiendo normalidad de las variables se podría obtener un modelo Black & Sholes en el caso de las opciones o el modelo *RiskMetrics* en el caso del VaR. Por otro lado, se pueden estimar las variabilidades de las variables mediante un método no paramétrico como lo es Monte Carlo (Embrechts, Hoing, & A, 2002). El VaR utiliza una metodología que se puede comparar con la de las opciones, donde el VaR busca medir el nivel de riesgo de un proyecto o un activo financiero mientras que las opciones buscan medir el valor de las flexibilidades en razón de los niveles de riesgo.

Existen varios métodos de cálculo del VaR, el método seleccionado dependerá de la naturaleza del portafolio que se esté analizando. El VaR puede tener varios enfoques, los más utilizados son los *locales* y los *globales* (Best, 1998). Los métodos de valoración *locales* son considerados métodos analíticos con modelos lineales o no lineales donde se utiliza el valor del portafolio en valor actual junto con la primera o segunda derivada parcial. Los métodos de valoración *globales* son técnicas de simulación o de escenarios como Monte Carlo, donde el portafolio se valora sobre un rango mayor de valores para los factores de riesgo.

Los métodos de valoración local se basan en una hipótesis de normalidad y toma en cuenta la derivada de primer orden o segundo orden, es decir, los cambios que tiene el rendimiento o si es cóncava o convexa. Muchas veces el método de valoración local no es la mejor forma de estimar el VaR debido a que algunas distribuciones en el portafolio pueden ser asimétricas o no se puede obtener las realizaciones extremas del activo subyacente (Beder, 1995). En el método de valoración global el VaR se calcula a partir de los percentiles del rendimiento y sus distribuciones.

Entrando más a detalle en el método de cálculo se tienen dos tipos de aproximaciones: las paramétricas y no paramétricas. Las aproximaciones paramétricas deben estimar un parámetro que es un factor multiplicativo que depende del nivel de confianza; en este sentido el VaR se deriva directamente de la desviación estándar y no de la lectura del cuartil en la distribución de los datos. El método paramétrico puede ser ajustado a cualquier tipo de distribución que señale un valor alfa de la distribución. En el presente proyecto se puede utilizar de forma comparativa un método paramétrico con distribución normal y *t* de Student.

Las aproximaciones no paramétricas utilizan los valores de las series definiendo una tendencia que se espera se mantenga en el futuro y se deriva el VaR a través del percentil de la distribución de la muestra. Estas aproximaciones son las más utilizadas; dentro de ellas se encuentran: la simulación histórica, los valores extremos, el método de varianza y covarianza y el método Monte Carlo.

1. Nivel de confianza y horizonte temporal

Para el cálculo del VaR no solo es necesario definir un modelo y un portafolio. La elección de parámetros estructurales del VaR es esencial dentro del cálculo del mismo. Dentro de la idea del Valor en Riesgo no solo es necesario entender el concepto de desviación estándar y valor esperado, sino entender cómo estas interactúan con las distribuciones de probabilidad. El nivel de confianza y el horizonte temporal son dos conceptos necesarios para la estructuración del VaR.

El primer paso para el cálculo del VaR es seleccionar los parámetros necesarios de horizonte temporal y nivel de confianza; estos dos elementos harán posible la estimación ya que son la base de la interpretación de los resultados.

El parámetro más fácil de seleccionar es el nivel de confianza. El alfa requerido para el cálculo del VaR depende del criterio de quien lo calcula, de su aversión al riesgo, las políticas de la organización o el costo de sobrepasar el valor esperado de pérdida. El nivel de confianza es necesario para la validación del modelo, es decir, es un parámetro que puede cambiar el VaR a medida que alfa incrementa o disminuye. Cabe recalcar que no existe un nivel de confianza óptimo en el cálculo del VaR; muchas instituciones mantienen un nivel de confianza del 95%, mientras que otras del 99% (recomendado por el comité de Basilea) todo depende de la robustez y fortaleza que se le quiera dar a este instrumento (Jorrion, 2000).

En cuanto al horizonte temporal, éste es un parámetro más difícil de seleccionar. El horizonte de tiempo se selecciona dependiendo la naturaleza del portafolio. La razón es que el período elegido debe ser el más largo para su liquidación ordenada (como la liquidez de los valores en términos de tiempo). Teniendo los valores en el mismo horizonte de tiempo se puede comparar los riesgos; si no se tienen los valores en el mismo horizonte de tiempo se puede utilizar un método econométrico llamado *agregación del tiempo* que básicamente supone, bajo una hipótesis de mercados eficientes, que toda la información pasada de la serie de precios se encuentra resumida en el precio actual. Para poder poner en práctica esta agregación de tiempo se necesita un supuesto fuerte: los rendimientos no están correlacionados en intervalos sucesivos de tiempo (Jorrion, 2000).

Tomando en cuenta estas consideraciones se obtiene que la volatilidad crece con la raíz cuadrada del tiempo, por lo que para ir de datos diarios, mensuales o trimestrales a datos anuales se puede multiplicar la esperanza de los rendimientos por el número de períodos por año y, para encontrar la desviación estándar se multiplica la desviación estándar de los rendimientos por la raíz cuadrada del número de períodos por año de esta manera:

$$\mu_{anual} = \mu_{periodo} T \tag{24}$$

$$\sigma_{anual} = \sigma_{periodo} \sqrt{T} \tag{25}$$

Donde *T* es el número de períodos por año.

2. Métodos de cálculo del VaR

2.1. Método paramétrico

El método paramétrico es uno de los más simples ya que solamente se debe estimar un parámetro de desviación y multiplicarlo por el nivel de confianza dentro de la curva de distribución. Este método supone rendimientos de distribución normal y es el método más rápido en términos de cálculo ya que sus parámetros son cálculos directamente de la serie histórica (Bank, 1995).

Este método es simple de calcular ya que solo se necesita obtener el parámetro de la desviación estándar y bajo el supuesto de normalidad se utiliza el valor probabilístico de la distribución al nivel de confianza requerido. Este método puede utilizarse también con otro tipo de distribuciones como la *t* de Student. La principal desventaja es que al suponer una distribución normal o *t*, existe la posibilidad de que las colas pesadas generen una subestimación del valor en riesgo, además no se puede utilizar en portafolios con opciones ya que no siguen una relación lineal.

2.2. La simulación histórica

El método de simulación histórica estima el VaR a partir de la distribución histórica de los activos, para esto se utiliza un desglose de los activos del portafolio y se los pondera para obtener una distribución histórica de los rendimientos, de los cuales se estima el percentil dado por el nivel de confianza alfa (Otárola, 2001).

El método de simulación histórica tiene tres ventajas según Otárola: la primera es que no se debe calcular ninguna matriz de varianzas y covarianzas ni distribuciones de probabilidad (esto es importante cuando se tiene una cartera con muchos datos), la segunda supone que los datos del presente se crearon tomando los del pasado y la tercera es que tiene muy pocos supuestos. El método es simple y consiste solamente en arreglar los valores por frecuencia y tomar el nivel de riesgo deseado dentro de los datos ordenados. Además no se necesita hacer agregaciones temporales de la volatilidad porque los retornos se calculan para el período de tiempo elegido.

Las desventajas de este método, por otro lado, recaen en la falta de precisión de las aproximaciones debido a la falta de datos suficientes. Los datos permiten hacer solamente una simulación donde todos los datos tienen la misma importancia y ponderación, es decir, los datos del pasado tienen el mismo peso que los datos del presente.

2.3. El método de varianza y covarianza

Este método supone que los rendimientos del activo se distribuyen normalmente, por lo que se puede graficar su distribución conociendo el valor medio esperado y la desviación típica. Se comienza creando una matriz de varianzas y covarianzas, multiplicándola por las ponderaciones de los activos; como se supone que la relación es lineal y genera una distribución normal entonces se toma el nivel de significancia deseado y se obtiene el valor en riesgo. Este método es un buen estimador cuando se tiene períodos cortos (Monge, 2003).

Este método es simple y solo requiere una hoja de cálculo para hacerlo. Sin embargo, presenta serias limitaciones ya que mantiene un supuesto fuerte de normalidad que puede llegar a predecir de manera incorrecta el valor en riesgo cuando se tiene colas pesadas, es decir, no mide adecuadamente los instrumentos que presenten un comportamiento no lineal.

2.4. La simulación Monte Carlo

La simulación Montecarlo corre un proceso repetitivo de una variable aleatoria para la variable de interés bajo un rango amplio de posibles situaciones y una distribución dada; de esta forma, el proceso iterativo del rendimiento bajo varios escenarios de una variable aleatoria, un horizonte definido y una distribución que se supone conocida puede simular los valores del VaR que por el teorema del límite, su media tenderá a acercarse al valor real del VaR (Ramirez, 2004).

Estos son los modelos más comunes sobre los cuales se calcula el VaR. Si bien cada uno tiene sus limitaciones y métodos de cálculo, dependiendo el tipo de activos y la distribución de rendimientos que se encuentren, unos serán más efectivos que otros. El objetivo de comparar estos diferentes métodos es entender sus limitaciones y definir cuál es el mejor modelo para medir el *Value at Risk*.

El método Montecarlo es uno de los métodos más completos para calcular el valor en riesgo porque toma en cuenta riesgos no lineales dentro de sus simulaciones. Los riesgos no lineales pueden asociarse con los riesgos de volatilidad y cambios en los riesgos a través del tiempo. Sin embargo, para realizar estas simulaciones es necesario tener mucha información y un uso extensivo de recursos informáticos por lo que se puede tener problemas para implementarlo (Beder, 1995).

2.5. La teoría de valores extremos

Este método toma en cuenta las anomalías que suele tener la distribución de las pérdidas de un portafolio concentrada en las colas. En este método se analizan los máximos y mínimos y se los integra a una matriz N a través de dos métodos: el máximo por bloques y el de excesos sobre el umbral. Si se estima por un máximo por bloques los rendimientos, se debe estimar una Distribución Generalizada de Valor Extremo (GEV) a través del método de máxima verosimilitud (Bali, 2003).

Si en los bloques elegidos existen más eventos extremos que en los otros, el método de selección de rendimientos extremos es sesgado y se debe utilizar un modelo sobre el umbral. Dentro de este modelo sobre el umbral, la distribución condicional de los excesos puede aproximarse mediante una Distribución Generalizada de Pareto (DPG) (Kleiber & Kotz, 2003). Esto se debe a que la elección del tamaño de los bloques puede cambiar los parámetros de la GEV, mientras que no en la DGP. Si bien el modelo sobre el umbral no se ve afectado por el cambio en el tamaño de los bloques, si puede sesgarse por la mala elección del umbral. Después de la estimación se procede a interpretar los modelos de valor extremo en términos de cuantiles al nivel de confianza deseado para obtener el VaR.

Si bien este modelo funciona para un cálculo matemático del VaR, en la práctica mantiene un nivel de recursos ociosos ya que el riesgo de que falle el VaR es igual a 1 menos el grado de confianza del modelo. Por esta razón se puede definir un modelo ARMA-

GARCH para analizar las tendencias y la desviación estándar esperada bajo supuestos de normalidad y de distribución *t* (Bali, 2003).

La teoría de valores extremos es uno de los métodos más eficientes para calcular el VaR ya que modela las colas de la distribución y las adapta a distribuciones diferentes a la normal. La desventaja de este método radica en la dificultad de cálculo ya que se deben estimar coeficientes mediante métodos de valores extremos y éstos dependen de la definición de los bloques o del umbral.

3. Otros cálculos del VaR

El VaR puede tener varias derivaciones para el mejor análisis del riesgo de un portafolio. Se puede analizar al VaR como un indicador de pérdidas de un portafolio con un nivel de confianza dado y un horizonte temporal definido, pero también se puede desagregar el VaR para entender el efecto marginal que un activo genera en la cartera y en el VaR total. Otra opción sería obtener un VaR incremental que brinde información del cambio en el VaR si se añade un vector de exposición adicional de factores de riesgo o un VaR por componentes que muestre la exposición al riesgo de cada activo tomando en cuenta la diversificación. Estos tres tipos de VaR dan información sobre el efecto individual de cada activo dentro del VaR total y el efecto incremental frente a un vector adicional de riesgo que puede ser muy importante en la toma de decisiones de la estructura de la cartera.

Si bien estos VaR son importantes para un análisis de riesgo de portafolio, mantienen una misma metodología que depende del cálculo del VaR, por lo que para propósitos comparativos del presente proyecto en cuanto a metodologías de cálculo, no se los utilizará.

3.1. VaR marginal

El VaR marginal es una metodología complementaria al VaR tratada por Linsmeier (Linsmeier & Pearson, 1996). La medida del VaR marginal sirve para analizar hasta qué punto la posición de un activo puede cambiar el valor en riesgo total de una cartera. Por ejemplo, suponiendo que se tiene un portafolio con dos activos financieros A y B, cada uno con un VaR individual de US$ 100. Al analizar el portafolio en su conjunto se obtiene que el VaR pasa a ser de US$ 150 (el riesgo disminuye gracias a la diversificación), el concepto del VaR marginal pasaría a ser el valor del VaR total que aumenta o disminuye con la agregación o sustracción de un activo financiero del portafolio. En el ejemplo se observa que el VaR marginal pasaría a ser de US$ 50 ya que el VaR total pasa de US$ 150 con dos activos, a US$ 100 por el activo individual que resta. Hay que tener en cuenta que mientras el VaR es positivo por tener una relación directa con la pérdida, el VaR marginal puede ser positivo o negativo ya que se habla en términos de cambio marginal, es decir, adicionar un activo puede ayudar a aumentar o reducir el riesgo total del portafolio gracias a la diversificación.

Si bien el concepto del VaR marginal es simple, su cálculo desde el punto de vista del riesgo puede pasar a ser un poco más complejo. Marginalmente, el cambio que sufre el portafolio cuando se adiciona o sustrae uno de sus activos puede verse como la beta del modelo CAPM. De esta forma se entiende que el VaR marginal puede interpretarse como una derivada. Para calcular la contribución marginal al riesgo del activo se debe diferenciar la ecuación para estimar la varianza de los rendimientos con respecto a las ponderaciones (Linsmeier & Pearson, 1996):

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial w_i} = 2w_i\sigma_i^2 + 2\sum_{j=1\ j\neq 1}^{N} w_j\sigma_{ij} \tag{26}$$

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial w_i} = 2Cov(R_i\ w_iR_i + \sum_{j\neq 1}^{N} w_jR_j) = Cov(R_iR_j) \tag{27}$$

De esta forma se tiene:

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial w_i} = 2\frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} \tag{28}$$

Así se obtiene la sensibilidad de la volatilidad del portafolio frente a un cambio en la ponderación de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = \frac{Cov(R_i,R_j)}{\sigma_p} \tag{29}$$

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = p_{ip}\frac{\sigma_i}{\sigma_p} \tag{30}$$

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = \beta_i \tag{31}$$

Matricialmente:

$$\underline{\beta} = \frac{\Sigma \underline{w}}{\underline{w'\Sigma w}} \tag{32}$$

Este coeficiente β pasaría a ser el riesgo sistémico de *i* con respecto al portafolio

$$\Delta VaR_i = \alpha \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} \tag{33}$$

$$\Delta VaR_i = \alpha \frac{Cos(R_i,R_j)}{\sigma_p} \tag{34}$$

$$\Delta VaR_i = \alpha(\beta_i \times \sigma_p) \tag{35}$$

En forma más completa se tiene que el VaR marginal es la variación en el VaR total frente al aumento o disminución de un activo dentro del portafolio. El coeficiente β serviría para elegir el instrumento que tiene mayor efecto en el riesgo del portafolio, donde si se quiere minizar el riesgo total se debe sacar del portafolio los activos con un β alto.

3.2. VaR incremental

El VaR incremental es un método analizado en (Otárola, 2001). Éste sirve para calcular o estimar el nuevo valor en riesgo de un portafolio cuando los porcentajes de inversión de los instrumentos son cambiados, es decir, se da un cambio en las posiciones de los activos financieros del portafolio por agregación o reducción en sus posiciones. El VaR incremental sigue la misma lógica que el VaR marginal como un método de comparación donde la resta entre el VaR de la cartera original y el de la nueva cartera con las diferentes posiciones puede dar una idea del riesgo, Otárola describe el proceso de la siguiente manera:

$$VaR_{Incremental} = VaR_{p+a} - VaR_p \tag{36}$$

Según Otárola, cuando se tiene una cartera con muchos activos y el cálculo del VaR tiene un problema de tiempo y recursos es posible pasar a estimar el VaR incremental tomando en cuenta el concepto del VaR marginal de la siguiente manera:

$$VaR_{Incremental} = \Delta VaR' \times a \tag{37}$$

Donde $\Delta VaR'$ es la matriz de los VaR marginales y a es un vector horizontal con los componentes al momento de la transacción propuesta. Cabe señalar que este método de estimación puede diferir del real si los cambios en los pesos de los activos (es decir el vector *a*) difieren en gran medida de los pesos originales.

3.3. VaR por componentes

El objetivo del VaR por componentes es descomponer la cartera por activos individuales denotando el valor que cada uno aporta al VaR total. La diferencia entre medir el VaR de cada elemento y sumarlos y obtener el VaR por componentes es que el VaR por componentes toma en cuenta la diversificación del riesgo, por lo que el VaR individual será mayor al VaR por componentes en términos monetarios tomando en cuenta que la volatilidad de un portafolio no es una función lineal de sus componentes (Penza & Bansal, 2001).

Según la metodología de Penza, al multiplicar el VaR marginal por la posición del activo dentro de la cartera se tiene lo siguiente:

$$VaR_{Componentes} = \Delta VaR_i \times w_i W \tag{38}$$

$$VaR_{Componentes} = VaR\beta_i w_i \tag{39}$$

Tomando en cuenta que:

$$\beta_i = \frac{\rho\sigma_i}{\sigma_p} \tag{40}$$

Se obtiene que el VaR por componentes:

$$CVaR_i = VaR\beta_i w_i = (\alpha\sigma_p W)w_i\beta_i \tag{41}$$

$$CVaR_i = (\alpha w_i \sigma_i W)\rho_i = VaR_i\rho_i \tag{42}$$

Hay que tomar en cuenta que la suma de estos componentes individuales pasa a ser el VaR total, por lo que se puede realizar la siguiente operación para determinar el peso porcentual de cada activo dentro del VaR total:

$$Peso\ activo\ i = \frac{CVaR_i}{VaR} = w_i\beta_i \tag{43}$$

Esta descomposición funciona de mejor manera cuando se la realiza en un portafolio con muchos activos ya que el cálculo se ajusta de mejor manera a la los componentes del portafolio.

METODOLOGÍA

1. Generación del portafolio

Para generar un portafolio se tomarán las series históricas de tres activos financieros con una inversión inicial de US$ 10.000. El tipo de activo seleccionado son acciones de empresas influyentes en el mercado ya que normalmente mantienen una relación lineal, estas empresas son, en el caso de Estados Unidos: General Electric, IBM y Apple; para el caso de Ecuador se seleccionaron: La Favorita, Banco de Guayaquil y Holcim. Las series históricas se obtuvieron de Bloomberg y de la Bolsa de Valores de Quito en una frecuencia diaria del 10 de noviembre de 2004 hasta el 20 de junio de 2014, es decir, 2.222 datos por acción sin contar los fines de semana y feriados. Todos los cálculos se realizarán a través del programa estadístico *R* con la ayuda de sus paquetes informáticos debido a la gran cantidad de datos que se requiere procesar.

Las acciones seleccionadas fueron elegidas principalmente por la cantidad de información histórica y facilidad de acceso ya que para modelar de forma correcta el VaR es necesaria una gran cantidad de datos. Los precios de las acciones fueron transformados en rendimientos logarítmicos para suavizar la serie y obtener resultados más cercanos a la realidad y el rendimiento total del portafolio se lo obtuvo multiplicando los rendimientos por su ponderación óptima, previo a un proceso de optimización de portafolio por el método creado por Markowitz.

Para el cálculo del VaR se utilizarán los modelos citados anteriormente a un nivel de confianza de 95%. Los resultados serán sometidos a una prueba *backtest* dentro de la muestra y fuera de la muestra utilizando el estadístico de Kupiec y Christoffersen para observar la robustez de cada modelo basado en el ajuste del nivel de confianza, es decir, el *backtest* debe dar como resultado que en el 5% de las veces el rendimiento del portafolio superó al VaR (siendo esta la hipótesis nula de ambos *tests*). Si es que el *backtest* muestra que fueron más veces o menos veces se podrá definir qué modelos subestiman o sobreestiman el VaR

2. Optimización del portafolio

Una vez elegidos los activos que pasarán a formar parte del portafolio, el siguiente paso es definir los pesos que tendrán dentro de la cartera. Para esto se utiliza el modelo de optimización de portafolios de Markowitz explicado anteriormente. Para su cálculo se utilizó el programa estadístico *R*.

Se debe tomar en cuenta que la optimización del portafolio requiere de la maximización del rendimiento minimizando el riesgo. Estos dos criterios se deben cumplir según Markowitz donde se obtiene que la medición de la ganancia esperada de un activo es la siguiente:

$$E[R] = \frac{P_f - P_i}{P_i} \tag{44}$$

Es decir, una relación simple expresada en crecimiento mediante el valor inicial P_i y el valor final P_f. Para tomar la ganancia esperada de varios activos que podrían componer un portafolio se tiene:

$$E[R_p] = \sum_{i=1}^{N} w_i E[R_i] \tag{45}$$

Donde w_i es un factor de ponderación de la cartera que depende de la proporción o cantidad de dinero o activos dentro del portafolio o espectro de análisis. La suma de todas las w_i debe dar como resultado siempre 1.

El segundo criterio es un paso más complejo que el primero. La varianza de un activo determina el grado de dispersión o variabilidad que tienen los datos de forma individual con respecto a la media. Si se supone una línea recta que represente la media, la varianza pasaría a ser el grado de dispersión de los puntos por encima y por debajo de esta línea recta.

$$Var(R_i) = \sigma^2 = E[R_i^2] - E^2[R_i] \tag{46}$$

El cálculo de la varianza para más dos activos sería la siguiente:

$$\sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j p_{ij} \sigma_i \sigma_j \tag{47}$$

Donde x_i representa la proporción invertida en el activo *i* y x_j representa la proporción invertida en el activo *j*, el factor p_{ij} pasaría a ser el coeficiente de correlación entre los activos *i* y *j* y el último componente $\sigma_i\sigma_j$ sería la raíz cuadrada de la varianza de cada activo, es decir, la desviación estándar del activo *i* multiplicada por la desviación estándar del activo *j*.

El proceso de optimización toma en cuenta los activos riesgosos y para efectos comparativos y de solución matemática se los puede comparar con un activo libre de riesgo que pasaría a ser el costo de oportunidad. La curva de la cartera compuesta con activos riesgosos pasaría a tener la siguiente estructura:

$$Min\ \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j p_{ij}\sigma_i\sigma_j \qquad (48)$$

Es decir, minimizar la varianza sujeto a las siguientes restricciones:

$$E(\overline{R}_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, E(\bar{R}_i) = R^* \qquad (49)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad (50)$$

$$x_i \geq 0 \qquad (51)$$

Donde $E(\overline{R}_p)$ es la ganancia esperada de la cartera, σ_p^2 es la varianza de la cartera, $E(\bar{R}_i)$ es la ganancia esperada del activo *i* y del activo *j*. La ganancia objetivo pasaría a ser la primera restricción (dada por R^*), la segunda restricción asegura que los pesos de los activos sumen la unidad y la tercera restricción limita a pesos positivos dentro de la cartera, es decir, activos mantenidos *long*[7]; esta restricción podría eliminarse para que en el resultado se pueda obtener activos *short*[8] dentro de la cartera (que es igualmente válido y esta posibilidad reduce aún más la varianza), pero las posiciones *short* dependen de la capacidad del mercado para ofrecerlas, el tiempo transcurrido y la apertura de las personas que las posean, limitadas al tipo de activo.

La solución matemática se daría en el punto donde cruza la frontera óptima y una curva de indiferencia que puede estar marcada por el nivel de aversión al riesgo del inversor.

---

[7] Una posición *long* es una posición donde se compra con el objetivo de vender a futuro para cerrar la posición (Van Horner, 2002).

[8] Es una posición donde se vende en el presente para cerrar la posición comprando el mismo activo en el futuro (Van Horner, 2002).

Al notar la ecuación a optimizar, se encuentra con un problema matemático complejo para la época de Markowitz que es la optimización de una ecuación no lineal. Este problema en la actualidad puede resolverse con el método de Lagrange, con programas estadísticos o hasta con *solver* de Excel.

3. Cálculo del VaR

El VaR puede representarse en términos del rendimiento del portafolio o de los rendimientos de los instrumentos de un portafolio. En el primer caso el cálculo es simple definiendo solo una serie con una sola distribución; sin embargo, en el segundo caso el cálculo se vuelve más complejo al tener más series con instrumentos de diferente distribución. Si se define a *R* como la tasa de rendimiento y el valor inicial del portafolio como W_0, el valor final del portafolio será según la metodología de *Risk Metrics*:

$$W = W_0(1 + R) \tag{52}$$

Se puede definir el valor más bajo de un portafolio W^* como:

$$W^* = W_0(1 + R^*) \tag{53}$$

Así:

$$R^* = \mu + \sigma Z_\alpha \tag{54}$$

En el caso del portafolio se tiene que $Z_\alpha$es el cuantil de la distribución normal estándar para el nivel de confianza α. De esta forma se puede encontrar la pérdida en unidades monetarias relativas al promedio:

$$VaR = E(W) - W^* = -W_0(R^* - \mu) \tag{55}$$

Se puede encontrar también el VaR absoluto, es decir, no condicionado a la media sino a 0 de la misma forma que se encuentra el VaR condicional encontrando el valor mínimo para W^* de la siguiente manera:

$$VaR = W_0 - W^* = -W_0 R^* \tag{56}$$

Se puede calcular el VaR básicamente de dos maneras, una paramétrica y otra no paramétrica. El cálculo paramétrico busca estimar un parámetro mientras que las no paramétricas siguen iteraciones y utilizan modelos como el Monte Carlo o la teoría de valores extremos que utiliza el teorema del límite central.

3.1. Modelos paramétricos

Existen varias formas de calcular el VaR de manera paramétrica, la aproximación mediante la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos es una de las más utilizadas. El VaR puede derivarse de la desviación estándar del portafolio con un factor multiplicativo estimado a un nivel de confianza dado. Si se tiene la distribución de probabilidad del valor futuro un portafolio W, es decir: $f_w(w)$. La metodología de *Risk Metrics* define el VaR paramétrico de la siguiente manera:

Si se elige un nivel de confianza α, se puede estimar la peor realización posible de W^*por lo que la probabilidad de exceder dicho valor sería:

$$\int_{W^*}^{\infty} fw(w)dw = \alpha \tag{57}$$

Y la probabilidad de encontrar un valor inferior sería:

$$p = P(W \leq W^*) = \int_{-\infty}^{W^*} fw(w)dw = 1 - \alpha \tag{58}$$

El VaR puede ser calculado de una forma más simple si se supone que la distribución de pérdidas y ganancias se distribuye normal

$$R \sim N(\mu, \sigma 2) \tag{59}$$

Si se toma esto en cuenta el VaR pasaría a ser calculado de la siguiente manera:

$$P[R \geq VaR] = P\left[\frac{R-\mu}{\sigma} \geq \frac{VaR-\mu}{\sigma}\right] = 1 - \alpha \tag{60}$$

Se puede utilizar la inversa de la distribución normal al notar que:

$$\frac{VaR-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha) = Z_\alpha \qquad (61)$$

De tal forma:

$$VaR = \mu + \sigma Z_\alpha \qquad (61)$$

Muchos inversionistas no toman en cuenta μ ya que si las pérdidas y ganancias se distribuyen normal, el rendimiento final tenderá a ser 0, es decir mayor a la desviación estándar.

$$R^* = \alpha\sigma \tag{62}$$

Por lo que (61) relativo se transforma en:

$$VaR = -W_0 R^* = -W_0 \alpha\sigma \tag{63}$$

Y (62) absoluto se transforma en:

$$VaR = -\mu W_0 - W_0 \alpha\sigma \tag{64}$$

Se podría calcular un valor monetario utilizando la inversa de la distribución normal.

$$VaR = W_0 \alpha F_R^{-1}(\alpha) \tag{65}$$

Donde la inversa de la función de distribución sería:

$$F_R^{-1}(\alpha) = \acute{\imath}nf\{r \epsilon \mathbb{R} : F_R(r) \geq \alpha\} \tag{66}$$

3.2. Matriz de varianzas y covarianzas

La estimación por varianzas y covarianzas se utiliza cuando se tiene un portafolio con más de un instrumento, esta matriz utiliza la descomposición del portafolio en sus elementos tomando en cuenta sus riesgos y rentabilidades. Según Monge, si los instrumentos se distribuyen normal, la relación del portafolio es lineal y se puede calcular el VaR de esta forma (Monge, 2003).

$$VaR = -W_0 Z_{1-\alpha} \sigma_\rho \tag{67}$$

Donde σ_ρ es la raíz cuadrada de la varianza del portafolio construida de la siguiente manera:

$$\sigma_\rho^2 = \underline{w}' \Sigma \underline{w} \tag{68}$$

Es decir, el vector de ponderación de los activos del portafolio $\underline{w}'$ multiplicado por la matriz de varianza y covarianza de los elementos del portafolio Σ y $\underline{w}$ el vector de ponderación de los activos. En otras palabras, el riesgo o desviación estándar del portafolio es igual a la raíz cuadrada de las ponderaciones de los activos por una matriz de varianzas y covarianzas multiplicadas por el vector de ponderación de los activos.

3.3. Aproximación no paramétrica

Las aproximaciones no paramétricas son aquellas que no utilizan supuestos de distribución de los rendimientos, por lo que no se debe estimar un parámetro para el cálculo del VaR, sino que se supone que la tendencia de los rendimientos sobre la base de una serie histórica o de modelaciones de varios escenarios se mantiene en el tiempo. Por esta razón la estimación del VaR se convierte en una proyección de un valor en el futuro resultante de la creación de una distribución de probabilidad basada en la serie histórica que se tiene.

3.4. Simulación histórica

Es un método no paramétrico donde no se utiliza el supuesto de distribución de los rendimientos, en cambio, se supone que la tendencia de la serie histórica se mantiene en el tiempo y que ésta predecirá bien las variaciones futuras si se mantiene la misma estructura del portafolio, logrando la simulación del VaR (Otárola, 2001).

Primero se debe identificar y diferenciar los elementos del portafolio con su respectiva serie histórica, después se procede a utilizar las ponderaciones del portafolio para simular los rendimientos hipotéticos y se construye una distribución de los rendimientos históricos bajo el supuesto de que ésta será la misma para los siguientes períodos. De esta forma solo se tiene que definir el percentil relevante.

Si:

$$R_{p,t} = \sum_{i=1}^{T} w_i R_{i,t} \quad t = 1, 2, 3, 4, \dots, T \tag{69}$$

Entonces se entiende que en la serie cada observación brinda un rendimiento particular del portafolio $R_{p,t}$. Los rendimientos del portafolio serán de esta manera las pérdidas y las ganancias de los instrumentos en total, junto con su ponderación. Si se quiere leer el VaR en este caso solo se debe situar en el percentil deseado de la distribución y el valor correspondiente a ese rendimiento de ganancias o pérdidas será el VaR histórico.

Paso por paso el método histórico según Otárola es el siguiente:

Se define el valor actual del portafolio P_T en el tiempo t desde la observación 1, es decir, la serie histórica, que está en función de sus factores de riesgo:

$$P_T = [f_{1,t}, f_{2,t}, f_{3,t}, \dots, f_{N,t}] \tag{70}$$

Si se observa el movimiento de los factores de riesgo de la distribución se tiene que:

$$\Delta f_i^k = [\Delta f_{1,t}, \Delta f_{2,t}, \Delta f_{3,t}, \dots, \Delta f_{N,t}] \tag{71}$$

Para obtener el valor hipotético del portafolio se puede utilizar un valor actual y la distribución de riesgos.

$$P^k = P[\Delta f_1^k, \Delta f_2^k, \dots, \Delta f_N^k] \tag{72}$$

Se calcula así el rendimiento tomando los cambios en el portafolio actual y el hipotético de la siguiente manera:

$$R^k = \frac{P_k - P^t}{P^t} \tag{73}$$

Por último, se ordenan los rendimientos de menor a mayor y se obtiene su distribución. De esta manera se debe solamente seleccionar el α-cuartil de la distribución creada. El VaR como valor se puede obtener de la resta entre el promedio y el cuantil.

$$VaR = \overline{R_p} - R_p(\alpha) \tag{74}$$

3.5. Simulación Montecarlo

El método Montecarlo es una simulación repetitiva de un proceso aleatorio que toma una variable de interés. Este proceso genera un rango de posibles escenarios partiendo de la distribución de las variables que se asumen conocidas. El objetivo de las simulaciones es repetirlo el número suficiente de veces como para que la distribución generada de los valores converja a la verdadera distribución de los valores del portafolio (Ramirez, 2004).

Uno de los problemas más importantes en el cálculo de VaR Montecarlo es la elección de un modelo que describa de forma adecuada el comportamiento de los rendimientos de los activos estudiados. El resultado dependerá de la correcta elección del modelo, por lo que se debe tomar en cuenta el instrumento financiero analizado y la precisión que se quiere que tengan los resultados. Generalmente se utiliza un modelo aleatorio browniano geométrico que supone que los precios se encuentran dominados por un proceso estocástico de una variable normal estándar. Para el cálculo del VaR por un método Montecarlo (Ramirez, 2004) se debe:

1. Elegir el proceso que describe el riesgo.

2. Generar una secuencia de variables a partir de las cuales se calcula el precio.

3. Calcular los valores del portafolio bajo esta secuencia a un período determinado.

4. Repetir los pasos 2 y 3 tantas veces como sea conveniente.

De esta forma se puede encontrar el VaR:

$$VaR = \overline{Ft} - R(Ft, p) \tag{75}$$

Donde $\overline{Ft}$ es la media de los valores simulados de Ft que se supone llegue al valor real por un proceso iterativo y $R(Ft, p)$ es el p-ésimo término de la distribución de Ft a FT siendo T el número de iteraciones propuestas para la simulación.

El proceso de generación de valores aleatorios es realmente un algoritmo que genera número pseudo aleatorios debido a la naturaleza de su proceso de generación bajo una regla determinística. El proceso es simple: se toma un valor inicial, un número llamado número semilla y se genera una serie de números que parecen aleatorios. La aleatoriedad en este caso dependerá del diseño del generador de los números aleatorios ya que si está bien diseñado pasará un test de aleatoriedad e independencia y si no lo está no logrará pasar este test. El proceso de generación de número aleatorios se puede encontrar en diferentes programas como R, SAS, Mathlab, Mathematica y otros. Entendiendo la estructuración del modelo y la generación de números aleatorios se pasa a la simulación Montecarlo.

Si el siguiente modelo describe el comportamiento de los precios de un activo:

$$dp_t = \sigma dZ_t \tag{76}$$

Donde dp_t es el precio actual que está en función de un término de volatilidad σ y una variable normal estándar Z_t . Si se asume una discretización de una variable de tiempo Δt se puede modelar la simulación de la siguiente manera:

$$p_t = p_{t-1} + \sigma Z_t \sqrt{\Delta t} \tag{77}$$

Asumiendo que $\Delta t = 1$ se tiene:

$$p_t = p_{t-1} + \sigma Z_t \tag{78}$$

De esta manera se obtiene el precio actual en función del precio pasado (t-1). El proceso iterativo se basa en este principio creando una distribución de la variable de precios.

$$p_{t+1} = p_t + \sigma Z_{t+1} \tag{79}$$

$$p_{t+1} = p_{t+1} + \sigma(Z_t + Z_{t+1}) \qquad (80)$$

De manera general el proceso iterativo pasaría a ser:

$$p_T = p_{t-1} + \sigma \sum_{i=t}^{T} Z_t \qquad (81)$$

El precio en *T* dependerá del precio en todos los *t* precedentes y Z_t será un número aleatorio generado por un proceso de números aleatorios antes descrito. De esta forma se generará una distribución simulada de los precios que converge al número real y así se calcula con facilidad el VaR.

3.6. Valores extremos

El método de estimación de valores extremos es uno de los más complejos de estimar y uno de los mejores para el cálculo del VaR ya que puede moldearse para optimizar el uso de los recursos. La complejidad del modelo radica en el entendimiento de las distribuciones de los rendimientos ya que en la práctica, se ha demostrado que éstos no tienen necesariamente distribuciones normales, sino distribuciones con colas pesadas (Mandelbrot & Hudson, 2004) donde los valores máximos que se encuentran en los extremos de la distribución tienden a ser mayores a los estimados por una regresión normal, por lo que suponer normalidad sería subestimar o sobreestimar los valores extremos de los rendimientos, lo que llevaría a una subutilización de recursos o a un mayor riesgo de liquidez si el VaR es aplicado a un modelo de liquidez.

El modelo de valores extremos puede ser ajustado con regresiones ARMA-GARCH para optimizar recursos (Bollersley, 1986). En el caso de un banco, si se tiene un VaR definido con una confianza del 99% y un período de 100 días estimado diariamente, se puede observar que el valor en riesgo tenderá a ser superado una vez cada 100 días. De esta manera, mantener los recursos ociosos por un período de 99 días para contrarrestar el único día de pérdida VaR resulta poco productivo para la institución. Mediante el método de valores extremos se puede fijar valores probabilísticos que ayuden a optimizar estos recursos por medio de regresiones ARMA-GARCH en distribuciones normales y *T* de Student.

La distribución de valores extremos (máximos o mínimos) es una técnica estadística que sirve para determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento aleatorio en las colas de la distribución que podrían ser pesadas de una forma más certera. Según Bali (Bali, 2003), si se determina que las observaciones que se encuentran en los extremos de la distribución son $\{X_t\}_{t=1,2,3,\dots,n}$ e *iid* entonces se define el máximo de las variables como:

$$M_n = max\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\} \tag{82}$$

En términos de probabilidad, esto se puede definir como:

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) = \{F(x)\}^n \tag{83}$$

Así el estadístico de orden *n* de la distribución de M_n es el resultado de la multiplicación de las probabilidades que conducen a la n-ésima convolución de la función de F(*x*).

Para la estimación de los valores extremos primero se debe encontrar los valores máximos o mínimos dentro de la distribución de rendimientos del portafolio. Para encontrar estos valores extremos se puede utilizar dos métodos: el método de máximo por bloques y el método de picos sobre el umbral. Para ambos métodos se requiere ordenar de forma histórica los rendimientos.

En el método de máximo por bloques se divide la muestra en *k* bloques con líneas verticales el gráfico de los rendimientos y se selecciona el valor máximo de cada bloque para obtener la serie de valores extremos $\{M_{n,i}\}_{i=1,2,3\dots,k}$. De esta forma se toman los valores máximos a lo largo de la serie eliminando la dependencia de los demás valores. Sin embargo, la eficiencia de este método depende de la serie, ya que si se tiene una serie con más valores seguidos o varios eventos raros por bloque esta tenderá a sesgar la serie de valores extremos y a subestimar el VaR.

El método de picos sobre el umbral consiste en determinar una línea horizontal en el histórico de los rendimientos *u* donde los valores extremos serán solo los que se encuentran por encima de este pico y estos pasarán a formar parte de la serie de valores máximos. Este método es más confiable que el anterior, aunque también puede tener fallas si se pone un umbral muy alto o muy bajo.

3.6.1. Método de máximos por bloques

Para la obtención de la distribución M_n es necesario encontrar la sucesión de constantes que estabilice la sucesión de máximos tanto en localización como en escala (Bali, 2003) de la siguiente manera:

$$M_n^* = \frac{M_n - b_n}{a_n} \tag{84}$$

Donde *b* y *a* son constantes de localización y escala (relacionándola a la normalización serían la media y la desviación estándar). Las observaciones extremas pueden converger en un tipo particular de distribución como lo menciona (Coles, 2001). Utilizando el teorema de Fisher-Tippet, Gnedenko se tiene que si $\{X_n\} = iid$ y existen sucesiones constantes $\{a_n > 0\}\ y\ \{b_n\}$ tal que:

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \to G(x) cuando\ n \to \infty \tag{85}$$

Donde *G(x)* es una función no degenerada por lo que *G* debe ser una de las siguientes distribuciones:

- Fréchet:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq b \\ exp\left\{-\left(\frac{x-b}{a}\right)^{-\varepsilon}\right\}, & x > b \end{cases} \tag{86}$$

- Weibull

$$G(x) = \begin{cases} exp\left\{-\left[-\left(\frac{x-b}{a}\right)^{-\varepsilon}\right]\right\} & x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases} \tag{87}$$

- Gumbel

$$G(x) = exp\left\{-exp\left[-\left(\frac{x-b}{a}\right)\right]\right\}, -\infty < x < \infty \tag{88}$$

Mediante una Distribución Generalizada de Valores Extremos (GEV) por sus siglas en inglés, se puede determinar cuál de las distribuciones anteriores se ajusta de mejor manera a la distribución de los rendimientos de la serie histórica. Como la serie de datos extremos que se obtiene mediante los bloques sigue una distribución GEV:

$$G(x) = exp\left\{-\left[1 + \varepsilon\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\varepsilon}\right\} \tag{89}$$

Así:

$$1 + \varepsilon\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) > 0 \tag{90}$$

Los parámetros de la función G(x) pasan a ser:

μ = parámetro de localización

σ = parámetro de escala

ε = parámetro de forma.

Determinando el valor de ε se puede definir la distribución a la que se apega el grupo de datos extremos:

- ε > 0. Se ajusta a una distribución de Frétcher
- ε < 0. Se ajusta a una distribución de Weilbull
- ε = 0. Se ajusta a una distribución de Gumbel

Para obtener el VaR se debe invertir la función GEV (89), donde el nivel de rendimiento se puede definir como el cuantil de la distribución de los máximos asociados a una distribución 1-p.

$$X_p = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\varepsilon}\{1 - [-\log(1-p)]^{-\varepsilon}\}, & para\ \varepsilon \neq 0 \\ \mu - \sigma\ log\{-\log(1-p)\}, & para\ \varepsilon = 0 \end{cases} \quad (91)$$

El VaR en este sentido pasaría a ser el nivel de rendimiento X_p donde la pérdida excede en promedio una vez cada *k* períodos de tamaño *n*. Para efectos de cálculo se utilizarán bloques de tamaño 5 para recoger los máximos semanales.

3.6.2. Modelos sobre el umbral

Si los bloques creados en el modelo anterior tienen deficiencias por omisión de ciertos datos extremos, se debe usar el modelo sobre el umbral. Este modelo toma en cuenta los datos que se encuentra sobre el límite vertical definido como *u*. La distribución condicional a que la variable aleatoria X_i sea mayor al umbral es una distribución de excesos que está dada por:

$$F_u(y) = P\left(X > u + \frac{y}{X} > u\right) = \frac{1-F(u+y)}{1-F(u)}, \quad y > 0 \quad (92)$$

Se ha probado que la distribución de excesos puede ser estimada bajo una Distribución Generalizada de Pareto para facilitar el cálculo (Franke, Hardle, & Stahl, 2004).

$$F_u(y) = 1 - (1 + \frac{\varepsilon y}{\beta})^{-1/\varepsilon} \tag{93}$$

Donde $\beta = \sigma + \varepsilon(u - \mu)$; en este caso el parámetro ε es también un parámetro de forma que ayuda a determinar a qué distribución se ajusta la serie de datos que se tiene. Las distribuciones pueden ser las siguiente dependiendo de ε:

- ε > 0, Se utiliza una distribución de Pareto.
- ε < 0, Se utiliza una distribución de Pareto tipo II.
- ε = 0, Se utiliza una distribución exponencial.

Una vez determinado *u* se puede encontrar los parámetros de la Distribución Generalizada de Pareto (DPG) estimándola a través de una función de máxima verosimilitud. Es mejor interpretar los modelos de valor extremo en términos de cuantiles que de los parámetros de forma individual. Si la DPG ajusta bien con sus parámetros los excesos de una variable aleatoria X sobre *u*, es decir *x*>*u*, entonces:

$$P(X > x \mid X > u) = \left[1 + \varepsilon(\frac{x-\mu}{\beta})\right]^{-1/\varepsilon} \tag{94}$$

En donde:

$$P(X > x) = \xi_u \left\{1 + \varepsilon(\frac{x-u}{\beta})\right\}^{-1/\varepsilon} \tag{95}$$

Si se determina $\xi_u = P(x > u)$, esto quiere decir que el nivel de x_m es excedido una vez cada *m* observaciones, por lo que x_m es la solución de:

$$P(X > x) = \xi_u \left\{1 + \varepsilon(\frac{x_m-u}{\beta})\right\}^{-1/\varepsilon} = \frac{1}{m} \tag{96}$$

Despejando x_m se obtiene:

$$x_m = u + \frac{\beta}{\varepsilon}[(m\xi_u)^{\varepsilon} - 1] \tag{97}$$

Esto suponiendo que *m* es suficientemente grande para asegurar que $x_m > u$ suponiendo ε ≠ 0.

Con ε = 0 la solución sería la siguiente:

$$x_m = u + \sigma \log(m\xi_u) \tag{98}$$

Tomando en cuenta que ξ_u es la proporción muestral que excede el umbral *u*, se la puede definir como un estimador de la forma $\frac{k}{n}$, utilizando este estimador de máxima verosimilitud se puede construir una medida de VaR estimado.

$$\widehat{VaR} = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\varepsilon}}\{(1-\alpha)/\widehat{\xi_u})^{\hat{\varepsilon}} - 1\} \tag{99}$$

4. Backtest

4.1. Backtest in simple y out of sample

El *backtest* es un método de validación de los modelos VaR. Es la prueba que se realiza a los resultados del VaR para comprobar que se cumplen los parámetros y el VaR está bien estimado al nivel de confianza definido. Es importante cuantificar el desempeño de las metodologías con fines de control y selección de la metodología apropiada. La metodología del backtest básicamente cuenta las veces en las que la pérdida fue mayor al VaR en un período específico de tiempo.

El *backtest* es una herramienta que se puede utilizar principalmente de dos formas: dentro de la muestra y fuera de la muestra. El método dentro de la muestra busca calcular el VaR y compararlo con la serie histórica de los rendimientos; el método fuera de la muestra es algo más complejo ya que busca predecir el VaR para un período *n-k* y compararlo con el valor real, haciendo de este un método de validación una herramienta para poner a prueba la capacidad del modelo de anticipar el comportamiento de la cartera a través del tiempo (Stavroyiannis & Zarangas, 2013).

En este caso, para un VaR calculado con un nivel de confianza del 95% y un período de tenencia de un día, se espera que las pérdidas excedan el VaR en un 5% de las observaciones evaluadas, es decir, una vez cada 20 días. Los principales objetivos del *backtest* son: determinar la eficiencia del modelo, disminuir los errores u omisiones que tenga el modelo mediante ajustes al mismo y medir periódicamente la metodología VaR de alguna institución.

Los pasos para desarrollar el *backtest* son los siguientes (Haro, 2008):

- Se calcula el rendimiento del portafolio sobre la valuación *mark-to-market.*
- Se compara periódicamente el valor en riesgo.

- Se cuentan las veces en las que los rendimientos superan el VaR.

- Se calcula el nivel de eficiencia como el número de excepciones dividido para el número de observaciones.

- Se compara el nivel de eficiencia con el nivel de confianza calculado.

Este método se lo puede realizar manualmente; sin embargo, el proceso es muy largo y tedioso si hay muchos datos de por medio por lo que se puede utilizar una prueba de hipótesis para determinar si el número de errores se ajustan o no al nivel de confianza.

4.2. Estadístico de Kupiec

La prueba de proporción de fallas de Kupiec es una prueba de hipótesis que evalúa la probabilidad de que la falla sea igual a 1-α (Melo & Becerra, 2005). Es decir, si se calcula un VaR con un nivel de confianza del 95%, entonces la hipótesis nula es que p=0.05 y la hipótesis nula se contrasta utilizando una prueba de razón de verosimilitud.

$$LR_p = -2ln\left[\frac{p^x(1-p)^{n-x}}{\hat{p}^x(1-\hat{p})^{n-x}}\right] \tag{100}$$

Donde x es el número de excepciones y n es el número de observaciones y $\hat{p} = \frac{x}{n}$. La hipótesis nula será rechazada cuando $p \leq 0.05$, si no se rechaza la hipótesis nula quiere decir que el modelo se ajusta correctamente. El estadístico se contrasta con una distribución chi cuadrado donde si el estadístico es mayor al valor chi cuadrado con el nivel de confianza dado, se dice que es un buen estimador.

4.3. Test de Christoffersen de independencia y cobertura condicional

El test de Christoffersen va más allá de las limitaciones de excepciones del VaR. Este test busca comprobar si las excepciones se distribuyen de manera uniforme en el tiempo o si de alguna forma estas pasan a formar *clusters*[9]. La importancia de la distribución uniforme de las excepciones se da por un problema de liquidez. Por ejemplo: si se calcula que existirán 5 excepciones al VaR en 100 días la pérdida no tiene el mismo impacto en la liquidez de la persona o institución si las pérdidas se dan de manera uniforme (una vez cada 20 días) que en forma de clúster (tres pérdidas en tres días seguidos). Para determinar

[9] Los *clusters* son concentraciones de empresas interconectadas que compiten y cooperan al mismo tiempo generando así valor agregado (Porter, 1990). El concepto de *Cluster* puede ser aplicado a las variaciones extremas bajo el mismo esquema.

si existe una uniformidad en las pérdidas se utiliza la prueba de pronóstico intervalo Christoffersen de cobertura condicional (Christoffersen, 1998).

Esta prueba examina si existe o no la probabilidad de que una violación del VaR dependa de si hubo o no otra violación en el día anterior. Si la medida VaR reflejara con precisión el riesgo subyacente entonces la probabilidad de violar el VaR de hoy sería independiente de si fue o no violado el VaR de ayer. Tomando en cuenta esto, el test asigna un indicador que toma el valor 1 si se excede el VaR y 0 si no es excedido.

$$I_t = \begin{cases} 1 & ,si\ la\ violación\ sí\ ocurre \\ 0 & ,si\ la\ violación\ no\ ocurre \end{cases} \tag{101}$$

Si se define $n_{j,i}$ como el número de días donde la condición *j* ocurrió asumiendo que la condición *i* ocurrió el día anterior, entonces se puede expresar todo en una matriz de 2X2. Siendo π_i la probabilidad de observar violaciones condicionales en un estado *i* el día anterior.

$$\pi_0 = \frac{n_{01}}{(n_{00}+n_{01})} \tag{102}$$

$$\pi_1 = \frac{n_{11}}{(n_{10}+n_{11})} \tag{103}$$

$$\pi = \frac{(n_{01}+n_{11})}{(n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11})} \tag{104}$$

La hipótesis nula en este caso pasaría a ser: $\pi_0 = \pi_1$. Para determinar de mejor manera esta hipótesis se utiliza un test estadístico de independencia de violaciones como un ratio de máxima verosimilitud de la siguiente manera:

$$LR_{ind} = -2ln\frac{(1-\pi)^{n_{00}+n_{10}}\pi^{n_{01}+n_{11}}}{(1-\pi_0)^{n_{00}}\pi_0^{n_{01}}(1-\pi_1)^{n_{10}}\pi_1^{n_{11}}} \quad \sim\chi^2(1) \tag{105}$$

Christoffersen descubrió que para el test se debía utilizar una distribución χ^2 con un solo grado de libertad. Si bien el test funciona de manera correcta, existieron varios casos donde los resultados presentaban NaNs (*Not* a Number en inglés). Para solucionar esto, Christoffersen impuso una excepcion al test donde si $n_{11} = 0$, es decir, no existe clusters de violaciones debido a los datos o a un alto nivel de confianza, la prueba debería realizarse de la siguiente manera, (Christoffersen & Pelletier, 2004)

$$LR_{ind} = (1-\pi_0)^{n_{00}}\pi_0^{n_{01}} \tag{106}$$

El test de Christoffersen de cobertura condicional (CC) pasa a ser una mezcla entre el test de independencia de Kupiec y de Christoffersen distribuido χ^2 con dos grados de libertad.

$$LR_{CC} = LR_{POF} + LR_{ind} \quad \sim\chi^2(2) \tag{107}$$

5. Limitaciones del VaR

El modelo VaR es uno de los modelos más utilizados en finanzas y su popularidad ha hecho que muchas empresas lo adopten como método de medición no solo de sus inversiones, sino también para medir sus riesgos de crédito y liquidez. Sin embargo, existen varias limitaciones del modelo que, si bien no lo invalidan, deben ser tomadas en cuenta al tomar decisiones.

La principal limitación del modelo se relaciona con sus supuestos. Si bien los supuestos son necesarios dentro de un modelo económico, muchas veces éstos no representan de forma acertada el comportamiento de los agentes económicos. En este caso el supuesto más fuerte es el de la normalidad de las distribuciones. En la mayoría de modelos VaR se asume que los rendimientos siguen una distribución normal y esto puede llegar a subestimar el valor en riesgo de un portafolio de inversiones por lo que se deben utilizar otros métodos matemáticos más complejos para corregir estos cálculos (Linsmeier & Pearson, 1996).

La modelación del VaR puede ser compleja cuando se busca un modelo óptimo ya que el supuesto de homocedasticidad de los errores puede llegar a no cumplirse. En el caso de que esto no se cumpla se debe modelar también la varianza de los errores mediante modelo ARCH (Engle, 1982), GARCH (Bollersley, 1986), EGARCH (Nelson, 1991) o TGARCH (Zakoian, 1994).

Para el cálculo del VaR es necesario tener una serie de datos históricos que representen el verdadero movimiento de los rendimientos a través del tiempo. La limitación del modelo en este aspecto recae sobre la dificultad de encontrar estas series históricas. A esto se le suma el problema de qué tanto representan estos datos el comportamiento y la volatilidad de los rendimientos ya que si se obtiene una serie con una volatilidad baja o en un período de relativa estabilidad, el VaR será subestimado (Linsmeier & Pearson, 1996).

El Banco de México (Mexico, 2010) emitió un informe sobre las limitaciones del VaR, poniendo énfasis principalmente en tres: el parámetro temporal, las diferencias de liquidez y las posibles crisis. El parámetro temporal del VaR puede llegar a ser un limitante. Al tener valores diarios de los rendimientos se asegura que la probabilidad de que el rendimiento haya fluctuado mucho durante el día sea baja; mientras que si se toman valores semanales, mensuales o trimestrales se está incrementando esa probabilidad y eso puede hacer que el modelo sea funcional dentro de su espacio temporal, pero poco práctico.

El VaR no considera las diferencias en la liquidez que los activos dentro de un portafolio ni las posibles crisis de mercado pueden suceder, por lo que el VaR sería un instrumento de control solamente durante períodos de estabilidad. Una limitación más matemática sería que si la distribución de pérdidas no es estrictamente creciente, el VaR puede representar problemas con el nivel de confianza. Cuando existe una pérdida que excede el VaR, es difícil definir el valor real de pérdida ya que cuando una pérdida lo excede, normalmente lo hace por mucho.

Dentro de los mercados financieros, una limitación del VaR podría ser su popularidad. Al utilizar todas las organizaciones un mismo método de cálculo de riesgo, se tiene problemas en el comportamiento del mercado en épocas de crisis. Por ejemplo, si el modelo determina que una posición debe ser vendida, todas las organizaciones que utilicen el mismo modelo venderán la posición, creando un incentivo para una crisis o empeorándola.

RESULTADOS

Al utilizar los métodos planteados en el capítulo anterior se obtuvo los valores en riesgo de los dos portafolios de tres acciones. El primer paso fue la estimación de los retornos en forma de logaritmos, después se pasó al cálculo de las ponderaciones por Markowitz para obtener un portafolio óptimo sobre la base de estos los retornos. Una vez obtenidos éstos se calculó el VaR de forma logarítmica y se efectuó el *backtest in sample* y *out of sample* con los estadísticos de Kupiec y Christoffersen.

1. Resultados del VaR

Mediante el método de optimización de Markowitz se obtuvo los siguientes resultados al optimizar el portafolio:

Tabla 1

Optimización de portafolio

Portafolio estadounidense		**Portafolio ecuatoriano**	
GE	0,4648034	**LF**	0,3983238
AAPL	0,3093796	**BG**	0,2982887
IBM	0,225817	**HC**	0,3033874

Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

Es decir, el portafolio optimiza sus rendimientos cuando se tiene 46.48% del valor nominal en acciones de General Electric (US$ 4.648), el 30,94% en acciones de Apple (US$ 3.094) y el 22,58% en acciones de IBM (US$ 2.258) para el portafolio estadounidense. Para el portafolio de Ecuador se tiene cerca del 40% en acciones de La Favorita (US$ 4.000), 30% en acciones del Banco de Guayaquil (US$ 3.000) y 30% para acciones de Holcim (US$ 3.000). Utilizando estos datos se puede obtener el rendimiento total del portafolio que será la principal variable de análisis.

Tabla 2

Rentabilidad de los portafolios

Portafolio estadounidense		**Portafolio ecuatoriano**	
GE	0,049%	***LF***	0,004%
AAPL	0,109%	***BG***	-0,015%
IBM	0,042%	***HC***	0,036%
Rentabilidad	0,0661%	***Rentabilidad***	0,0080%

Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

En cuanto a la rentabilidad, se observa que el portafolio más rentable es el estadounidense y la acción más rentable de este portafolio es la de Apple con 0,109% diario. En el caso del portafolio ecuatoriano se observa una rentabilidad baja y se tiene que en el Banco de Guayaquil ésta pasa a ser negativa. La rentabilidad nos puede dar también una idea del riesgo, la relación implícita pasaría a ser que el portafolio más rentable es también el más riesgoso. Esto se puede confirmar más adelante con el cálculo del VaR.

Los resultados del VaR difieren unos de otros debido al método utilizado. Los resultados fueron obtenidos en logaritmos y se los transformó en términos monetarios mediante una simple operación de exponentes. Los resultados del VaR para cada uno de los métodos son los siguientes:

Tabla 3

Resultados VaR portafolio estadounidense

	VaR (ln)	VaR ($)	VaR (%)
Histórico	-0,0252739	$ (249,57)	-2,50%
Gaussiano	-0,0271283	$ (267,64)	-2,68%
Montecarlo	-0,0270087	$ (266,47)	-2,66%
VE Umbral	-0,0252944	$ (249,77)	-2,50%
VE Bloques	-0,02854	$ (281,37)	-2,81%
Paramétrico "t"	-0,0363134	$ (356,62)	-3,57%
Var y Covar	-0,0275403	$ (271,65)	-2,72%

Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

Los resultados del VaR muestran que para un portafolio optimizado de acciones de General Electric, Apple e IBM de US$ 10.000 el valor en riesgo fluctúa entre el 2,5% y el 3,57%, es decir, se esperaría que en 5 de 100 días el portafolio presente pérdidas mayores a US$ 249,57 como límite mínimo y de US$ 356,62 como límite máximo. Relacionando este concepto de riesgo con rentabilidad se esperaría tener para el portafolio ecuatoriano un VaR menor.

Tabla 4

Resultados VaR portafolio ecuatoriano

	VaR (ln)	**VaR ($)**	**VaR (%)**
Histórico	-0,00963473	$ (95,88)	-0,96%
Gaussiano	-0,01578146	$ (156,58)	-1,57%
Montecarlo	-0,01586433	$ (157,39)	-1,57%
VE Umbral	-0,00969418	$ (96,47)	-0,96%
VE Bloques	-0,0161108	$ (159,82)	-1,60%
Paramétrico "t"	-0,01631341	$ (161,81)	-1,62%
Var y Covar	-0,01573115	$ (156,08)	-1,56%

Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

Los resultados del VaR muestran que para un portafolio optimizado de acciones de La Favorita, Banco de Guayaquil y Holcim de US$ 10.000 el valor en riesgo fluctúa entre el 0,96% y el 1,62%, es decir, se esperaría que en 5 de 100 días el portafolio presente pérdidas mayores a US$ 96,47 como límite mínimo y de US$ 161,81 como límite máximo. Los resultados confirman que el portafolio con menor rentabilidad es también el menos riesgoso, pero su relación no es necesariamente lineal debido a la estructura del mercado y sus diferencias. Es importante notar que el riesgo del portafolio estadounidense es 2,6 veces más riesgoso que el ecuatoriano, mientras que el rendimiento pasa a ser 8,3 veces superior.

A primera vista se observa que el portafolio estadounidense tiene una mayor volatilidad que el portafolio ecuatoriano. Esta volatilidad puede sugerir que el mercado de Ecuador se ha mantenido más estable que el mercado de Estados Unidos (ya que en teoría las variaciones de la Bolsa de Valores pueden describir el estado de la economía del país) o que la Bolsa de Valores en Ecuador tiene un menor grado de profundidad donde no existe una cultura financiera robusta y los movimientos de la bolsa de valores no representan los movimientos de la economía.

Los valores del VaR no difieren mucho el uno del otro por los diferentes métodos; sin embargo, esas diferencias pueden llevar a una estimación ineficiente o errada de la verdadera pérdida que podría llegar a presentar el portafolio especialmente si este tiene un gran tamaño. Para entender qué modelo está sobrestimando o subestimando la pérdida y observar si las mayores variaciones se dan uniformemente se utilizó el método de *backtest.*

2. Backtest

2.1. Backtest *in sample*

El backtest *in sample* busca encontrar las veces en las que la pérdida del portafolio superó al VaR calculado dentro de la serie histórica de rendimientos. Tomando en cuenta que se tiene un nivel de confianza de 95% se espera que el error sea 5%.

Tabla 5

Resultado backtest *in sample* portafolio estadounidense

	Esperados	**Reales**	**Diferencia**	**Error**	**Subest/Sobrest**
Histórico	111	111	0	5,01%	Subestima
Gaussiano	111	92	19	4,13%	Sobrestima
Montecarlo	111	93	18	4,20%	Sobrestima
VE Umbral	111	111	0	5,01%	Subestima
VE Bloques	111	77	34	3,49%	Sobrestima
Paramétrico "t"	111	40	71	1,79%	Sobrestima

Var y Covar	111	86	25	3,89%	Sobrestima

Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

Tabla 6

Resultado backtest *in sample* portafolio ecuatoriano

	Esperados	**Reales**	**Diferencia**	**Error**	**Subest/Sobrest**
Histórico	111	111	0	4,998%	Sobrestima
Gaussiano	111	56	55	2,521%	Sobrestima
Montecarlo	111	56	55	2,521%	Sobrestima
VE Umbral	111	111	0	4,998%	Sobrestima
VE Bloques	111	55	56	2,476%	Sobrestima
Paramétrico "t"	111	43	68	1,936%	Sobrestima
Var y Covar	111	57	54	2,566%	Sobrestima

Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

Los resultados muestran que ningún modelo estima exactamente el valor en riesgo sino que tienden a subestimarlo o sobreestimarlo. Los modelos más precisos resultaron ser los valores obtenidos mediante el método *Histórico* y el de *Valores Extremos con máximos sobre el umbral*. Por el lado del método *Histórico* se debería esperar que pase esta prueba ya que es un método que utiliza directamente los percentiles de la serie histórica; por otro lado, el resultado del método de *valores extremos con máximos sobre el umbral* brinda un elemento robusto sobre el cual trabajar porque este método modela las colas de la distribución, no utiliza solamente una medida de posición por lo que sus parámetros y modelización son más confiables.

En el cálculo del VaR siempre se encuentra que éste llega a sobrestimar o subestimar de alguna manera los rendimientos reales del portafolio, por esta razón se utiliza una prueba de significancia. Si bien los métodos *Histórico* y el de *Valores Extremos con máximos sobre el umbral* son los que mejor se ajustan al *backtest in sample*, no se pueden descartar los demás métodos sin antes realizar el test de Kupiec y Christoffersen.

Tabla 7

Test Kupiec *in sample* portafolio estadounidense

	Kupiec (POF)	***V. Crítico POF***	***p value***	***Decisión***
Histórico	0,000166628	3,841459	0,9897008	Acepta H0
Gaussiano	13,36463	3,841459	0,0002564	Rechaza H0
Montecarlo	11,44	3,841459	0,000719	Rechaza H0
VE Umbral	0,0001666	3,841459	0,9897	Acepta H0
VE Bloques	42,59	3,841459	6,76E-11	Rechaza H0
Paramétrico "t"	225,7	3,841459	0	Rechaza H0
Var y Covar	22,16005	3,841459	2,508E-06	Rechaza H0

Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

Tabla 8

Test Kupiec *in sample* portafolio ecuatoriano

	Kupiec (POF)	**V. Crítico POF**	**p value**	**Decisión**
Histórico	2,37006E-05	3,841459	0,9961157	Acepta H0
Gaussiano	34,85	3,841459	3,569E-09	Rechaza H0
Montecarlo	34,85	3,841459	3,569E-09	Rechaza H0
VE Umbral	2,37006E-05	3,841459	0,9961157	Acepta H0
VE Bloques	36,28	3,841459	1,705E-09	Rechaza H0
Paramétrico "t"	38,8	3,841459	1,805E-10	Rechaza H0
Var y Covar	33,44	3,841459	7,338E-09	Rechaza H0

Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

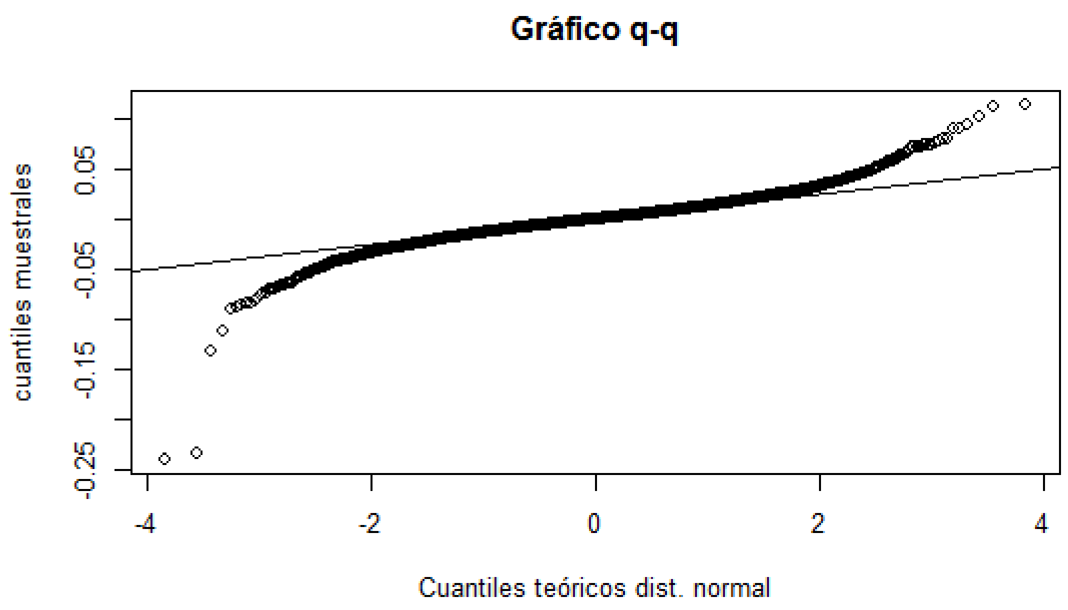
El test de Kupiec busca aprobar el modelo dentro de cierto nivel de confianza. La hipótesis nula (H0) es que no se puede rechazar que el resultado del modelo se ajusta al nivel de confianza propuesto. Según los datos obtenidos se puede ver que solo dos modelos aceptan la hipótesis nula, estos dos modelos fueron los que anteriormente se ajustaron de mejor manera al error del 5%. Los otros modelos como el *Montecarlo* y *Gaussiano* no aprobaron el *test* por 0,5% de error en el portafolio estadounidense. Si se observa los resultados del portafolio ecuatoriano se encuentra una gran diferencia en el *p value* de los demás modelos, esto significa que la estructura de las distribuciones de los rendimientos de las acciones es diferente en el mercado de Estados Unidos y de Ecuador. Mientras que en Estados Unidos se podría utilizar otros métodos con un nivel de error de cerca del 6%, en Ecuador este nivel de error pasaría a ser de cerca del 15% para que el modelo prediga de manera apropiada el VaR.

Además, los valores obtenidos en el estadístico de Kupiec revelan que los modelos bajo distribución *t* son los que menos se ajustan a la predicción del VaR ya que lo sobrestiman en gran medida; mientras que los que utilizan una hipótesis de normalidad no calculan de manera correcta el VaR del portafolio por un porcentaje mínimo de errores, por esta razón podrían ser tomados en cuenta con ciertos cambios en el nivel de confianza, pero no resultan óptimos en el nivel de confianza analizado.

Para comprobar el supuesto de normalidad se buscó realizar un test de normalidad mediante un gráfico Q-Q que no es más que un gráfico comparativo que dibuja los cuantiles reales de la distribución de los datos y los cuantiles de la distribución normal y según como se ajusten los mismos se determina si los datos se distribuyen normal o no.

Gráfico 1

Portafolio estadounidense



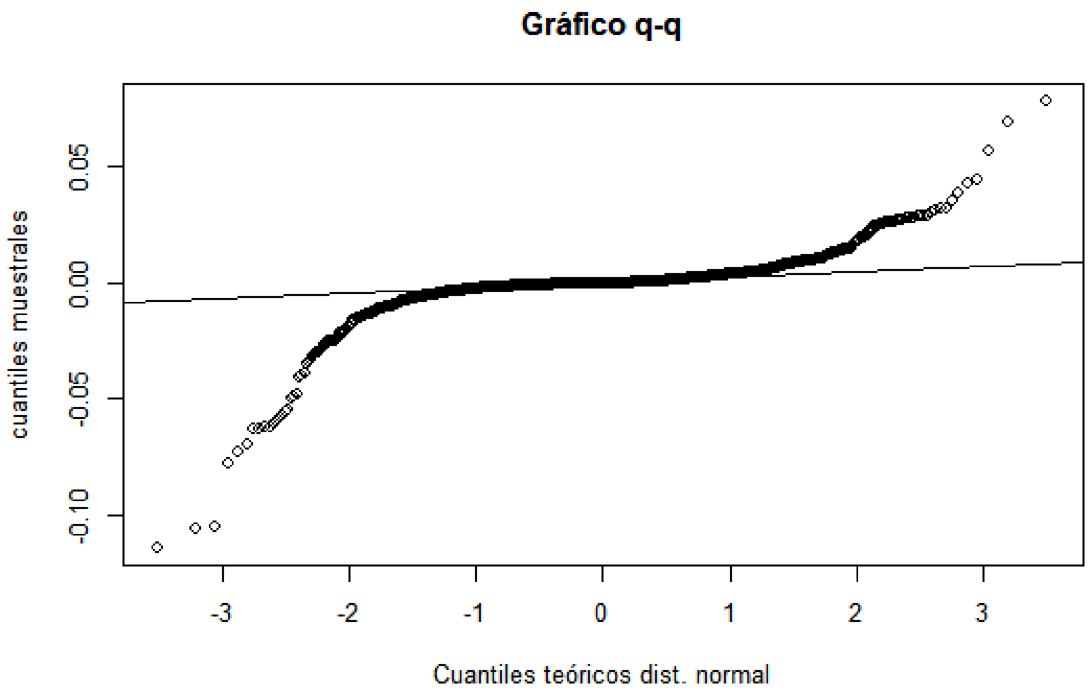
Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

Los cuantiles muestrales en el caso del portafolio estadounidense se ajustan a los cuantiles de la distribución normal; sin embargo, se puede ver que existe una pequeña diferencia en los cuantiles de las colas que pueden generar problemas cuando se utiliza una hipótesis de normalidad y especialmente cuando bajo esta misma se busca modelar los extremos. La hipótesis de normalidad en el caso de este portafolio serviría para determinar valores esperados del portafolio como predicciones, pero al modelar las colas podría llevarnos a errores; esto podría explicar el por qué los modelos *Montecarlo, Gaussiano y Varianzas y Covarianzas* tuvieron problemas con el test de Kupiec.

Gráfico 2

Portafolio ecuatoriano



Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

Al observar los valores del gráfico Q-Q del portafolio ecuatoriano se tiene que también se ajusta a una distribución normal en el centro, sin embargo, las colas se alejan de esta distribución por lo que se espera en este caso colas pesadas. Se puede observar una diferencia entre las colas de los dos portafolios: el hecho de que las colas en el portafolio ecuatoriano tiendan a alejarse más de una distribución normal que las colas del portafolio estadounidense explican el menor ajuste al VaR en los modelos con hipótesis de normalidad, explicada por la estructura de las colas que hace que los métodos comunes sean menos precisos en un portafolio que el otro.

Con el gráfico de normalidad se puede sustentar los resultados del VaR. Los métodos Histórico y de Valores Extremos sobre el umbral son los que mejor predicen el VaR, después se tiene con un mayor grado de error los modelos que suponen normalidad y por último se encuentra la distribución *t.* En cuanto al método de *Valores Extremos por bloques* este un método poco confiable como se describe en el anterior capítulo.

Tabla 9

Test Christoffersen *in sample* portafolio estadounidense

	Christoffersen (ind)	**V. Crítico ind**	***p value***	**Decisión**
Histórico	41,98234	5,991465	7,65E-10	Rechaza H0
Gaussiano	57,34968	5,991465	3,52E-13	Rechaza H0
Montecarlo	56,09	5,991465	6,63E-13	Rechaza H0
VE Umbral	41,98	5,991465	7,65E-10	Rechaza H0
VE Bloques	81,71	5,991465	0	Rechaza H0
Paramétrico "t"	252,7	5,991465	0	Rechaza H0
Var y Covar	65,59219	5,991465	5,66E-15	Rechaza H0

Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

Tabla 10

Test Christoffersen *in sample* portafolio ecuatoriano

	Christoffersen (ind)	V. Crítico ind	p value	Decisión
Histórico	0,06230191	5,991465	0,9693292	Acepta H0
Gaussiano	34,99	5,991465	2,528E-08	Rechaza H0
Montecarlo	34,99	5,991465	2,528E-08	Rechaza H0
VE Umbral	0,06230191	5,991465	0,9693292	Acepta H0
VE Bloques	36,4	5,991465	1,249E-08	Rechaza H0
Paramétrico "t"	35,4	5,991465	1,309E-09	Rechaza H0
Var y Covar	33,62	5,991465	5,016E-08	Rechaza H0

Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

El test de Christoffersen muestra si las excepciones al VaR se distribuyen uniformemente a lo largo de la muestra, la hipótesis nula es que estas excepciones sí se distribuyen uniformemente. En el caso del portafolio estadounidense los datos obtenidos indican que esta hipótesis se rechaza en todos los casos por lo que las excepciones no se distribuyen de manera uniforme sino que tienden a crear *clusters*. Esta es una característica típica de las crisis ya que elevan la volatilidad en un período y luego esta tiende a estabilizarse haciendo que la serie de datos genere grupos de extremos donde se encuentran las excepciones. Estas variaciones reflejan el comportamiento del mercado por lo que el test de Christoffersen evidencia que la bolsa de valores de Estados Unidos refleja el comportamiento de la economía gracias a su profundidad y nivel de transaccionalidad.

Por otro lado, se tiene que el portafolio ecuatoriano rechaza la hipótesis nula en la mayoría de casos, a excepción del modelo *Histórico y Valores Extremos sobre el umbral*, es decir, los modelos de mejor ajuste. Esto evidencia que en el portafolio ecuatoriano las variaciones máximas se dan en períodos uniformes de tiempo, por lo que existen ciclos de variaciones de precios bien definidos que podrían explicarse por la repartición de dividendos donde el precio de las acciones tiende a aumentar en un mercado financiero poco profundo.

Debido a la naturaleza del comportamiento de los instrumentos financieros dentro de un mercado dinámico, el rechazar la hipótesis nula es coherente con la teoría financiera ya que confirma la presencia de heterocedasticidad que debe ser corregida mediante un método GARCH, EGARCH o TGARCH (Anexo 1). Por otro lado el aceptar la hipótesis nula da evidencia de que el instrumento financiero tiene rendimientos uniformes y en el caso de las acciones, poca profundidad de mercado por lo que éstas no reflejan el comportamiento de la economía.

El *backtest in sample* con el estadístico de Kupiec ayudó a determinar que los mejores modelos para el cálculo del VaR fueron el *Histórico y el de Valores Extremos con máximos sobre el umbral*. Sin embargo, la serie presenta problemas de heterocedasticidad en el caso estadounidense y evidencias de poca comercialización en el mercado ecuatoriano estos problemas podrían afectar al cálculo del VaR.

Para una mayor robustez se debe realizar un *backtest out of sample* para entender el ajuste que tiene el modelo cuando el cálculo es más dinámico ya que éste busca determinar la capacidad del modelo de predecir el VaR, de una manera práctica la selección de un modelo robusto tiene más peso si éste pasa las pruebas fuera de la muestra que dentro de la muestra por sus mejores aplicaciones predictivas.

2.2. Backtest *out of sample*

El *backtest out of sample* se realizó tomando en primer lugar 1.000 datos para el pronóstico del VaR en “t+1”, este pronóstico se comparó con el dato real de rendimiento y de esta forma se fueron determinando las excepciones. En total se realizaron 1.080 proyecciones iterativas de las que se pudo hacer 1.080 comparaciones para obtener el *backtest* mediante los diferentes modelos. Los resultados del *backtest out of sample* se presentan a continuación:

Tabla 11

Resultados *backtest out of sample* portafolio estadounidense

	Esperados	**Reales**	**Diferencia**	**Error**	**Subest/Sobrest**
Histórico	54	49	-5	4,51%	Sobrestima
Gaussiano	54	56	2	5,20%	Subestima
Montecarlo	54	55	1	5,12%	Subestima
VE Umbral	54	53	-1	4,94%	Sobrestima
VE Bloques	54	47	-7	4,36%	Sobrestima
Paramétrico "t"	54	78	24	7,21%	Subestima
Var y Covar	54	62	8	5,71%	Subestima

Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

Tabla 12

Resultados backtest *out of sample* portafolio ecuatoriano

	Esperados	**Reales**	**Diferencia**	**Error**	**Subest/Sobrest**
Histórico	54	46	8	4.26%	Sobrestima
Gaussiano	54	48	6	4.44%	Sobrestima
Montecarlo	54	44	10	4.07%	Sobrestima

VE Umbral	54	47	7	4.35%	Sobrestima
VE Bloques	54	388	-334	35.93%	Subestima
Paramétrico "t"	54	41	13	3.80%	Sobrestima
Var y Covar	54	40	14	3.70%	Sobrestima

Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

El *backtest out of sample* muestra un aumento en el error en los modelos de mejor ajuste (Histórico y Valores extremos sobre el umbral) y una mejora en la estimación de los demás modelos, esto quiere decir que todos los modelos al predecir el VaR tienden a mejorar sus estimadores cuando en un test *in sample* estos sobrestiman en valor en riesgo y empeoran los resultados cuando éstos en el mismo test, subestiman el VaR. Esto se debe a que existe un término de error presente en las predicciones del VaR que puede afectar su valor pronosticado.

La diferencia de los resultados entre el *backtest in simple* y *out of sample* es notable, ya que el método *out of sample* tiende a beneficiar las aproximaciones del VaR cuando éste es modelado por métodos que suponen normalidad. A pesar de esto, el método de *Valores Extremos con máximos sobre el umbral* es el método que mejor se ajustó al nivel de confianza del VaR en los dos *backtests*. Para determinar qué modelos podrían ser utilizados, se realizan los test de Kupiec y Christoffersen en las proyecciones *out of sample*

Tabla 13

Test Kupiec *out of sample* portafolio estadounidense

	Kupiec (POF)	**V. Crítico POF**	**p value**	**Decisión**
Histórico	3,278	3,841459	0,07023	Acepta H0

Gaussiano	0,01751	3,841459	0,8947	Acepta H0
Montecarlo	0,09442	3,841459	0,7586	Acepta H0
VE Umbral	0,01202	3,841459	0,9127	Acepta H0
VE Bloques	5,498	3,841459	0,01903	Rechaza H0
Paramétrico "t"	84,27	3,841459	0	Rechaza H0
Var y Covar	7,929	3,841459	0,004865	Rechaza H0

Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

Tabla 14

Test Kupiec "out of sample" portafolio ecuatoriano

	Kupiec (POF)	**V. Crítico POF**	**p value**	**Decisión**
Histórico	1,626	3,841459	0,2023	Acepta H0
Gaussiano	0,9586	3,841459	0,3275	Acepta H0
Montecarlo	3,159	3,841459	0,07551	Acepta H0
VE Umbral	1,105	3,841459	0,2931	Acepta H0
VE Bloques	8,655	3,841459	0,003262	Rechaza H0
Paramétrico "t"	9,332	3,841459	0,002368	Rechaza H0
Var y Covar	8,655	3,841459	0,003262	Rechaza H0

Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

El test de Kupiec *out of sample* indica que los modelos que se ajustan de mejor manera al VaR con un nivel de confianza de 95% son: *Valores Extremos con máximos sobre el umbral*, seguido por el método *Gaussiano, Montecarlo* y finalmente el *Histórico.*

Estos resultados resaltan dos preguntas clave. La primera es: ¿por qué el método histórico en un análisis *in sample* se ajusta en gran medida al nivel de confianza, pero en el análisis *out of sample* casi no supera la prueba de significancia?, la segunda pregunta pasaría a ser: ¿por qué los métodos que suponen normalidad aprueban el test de Kupiec en un *backtest out of sample* a excepción del método de *Varianzas y Covarianzas*?

Para responder la primera pregunta se debe entender que el método *Histórico* no calcula ningún parámetro, sino que es una medida de posición donde se busca el valor 5% de la distribución de rendimientos del portafolio. Este cálculo es muy preciso cuando se lo analiza dentro de la muestra, pero cuando se efectúan proyecciones para calcular el VaR, este método pasa a ser poco útil. Esto se debe a que en la mayoría de las ocasiones se encuentra un contraste de normalidad en vista de que su distribución está condicionada a un promedio y una varianza. Dado que el VaR *Histórico* es una relación numérica simple sobre la serie de datos analizada, incorpora un componente alto de varianza el cual, a su vez, incide sobre la normalidad y hace posible evaluar este método *in sample*. Mientras más extensa es la serie se acopla un mayor elemento de variabilidad sobre la misma, lo cual incide sobre su distribución normal, esto explica que en un *backtest out of sample* el método histórico sea menos fiable (lo cual se puede confirmar con la p-value del estadístico de Kupiec). Por lo general este método se acepta debido a que la distribución de los datos se ve reflejada sobre la varianza que incorpora la serie, lo que lo hace un método más informativo que práctico para usar.

La segunda pregunta se fundamenta en el supuesto de normalidad y el cálculo de la varianza que realiza cada uno. La diferencia entre el método *Gaussiano* y el de *Varianza y Covarianza* es que el primero asume los principios de una serie de tiempo, por lo cual sintetiza de mejor manera la variabilidad de los datos dando lugar a un mejor resultado mientras que el segundo método, dado que su naturaleza trabaja sobre variables y calcula matricialmente la varianza de punto a punto más no sobre series de tiempo; incorpora mayor nivel de variabilidad sobre los datos lo cual deriva en menos precisión. Es por esta razón que en el *backtest out of sample* los modelos que suponen normalidad son aceptados a excepción del de *Varianzas y Covarianzas*.

Sobre la base de estos resultados se puede determinar que el mejor modelo para el cálculo del VaR sería el de *Valores Extremos con máximos sobre el umbral* a que pasó con un buen grado de ajuste el estadístico de Kupiec en los dos *backtests* y dentro de la literatura éste pasa a ser uno de los mejores simulando las distribuciones de la variable estudiada sin importar la distribución que tengan las colas ya que el método se ajusta a ellas. Se podría decir también que los modelos bajo supuesto de normalidad como el *Gaussiano* o *Montecarlo* son también válidos para el cálculo del VaR; sin embargo, se debe tener en cuenta la distribución de los rendimientos del portafolio y el hecho de que estos modelos no se ajustan tan bien como un modelo por valores extremos por el comportamiento de las colas que puede variar de muestra en muestra.

Si se analiza el segundo estadístico, el estadístico de Christoffersen, se espera tener valores similares *out of sample* que *in sample* debido a la distribución de los excedentes donde anteriormente se encontró la presencia de *clusters* que dan indicios de heterocedasticidad en el portafolio estadounidense e indicios de poca profundidad de mercado para el portafolio ecuatoriano.

Tabla 15

Test Christoffersen *out of sample* portafolio estadounidense

	Christoffersen (ind)	V. Crítico ind	p value	Decisión
Histórico	49,07	5,991465	2,21E-11	Rechaza H0
Gaussiano	40,39	5,991465	1,7E-09	Rechaza H0
Montecarlo	36,57	5,991465	1,15E-08	Rechaza H0
VE Umbral	30,85	5,991465	2E-07	Rechaza H0
VE Bloques	71,88	5,991465	2,22E-16	Rechaza H0
Paramétrico "t"	126,4	5,991465	0	Rechaza H0

Var y Covar	51,05	5,991465	8,22E-12	Rechaza H0

Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

Tabla 16

Test Christoffersen *out of sample* portafolio ecuatoriano

	Christoffersen (ind)	**V. Crítico ind**	**p value**	**Decisión**
Histórico	2,008	5,991465	0,3664	Acepta H0
Gaussiano	0,9656	5,991465	0,617	Acepta H0
Montecarlo	3,166	5,991465	0,2054	Acepta H0
VE Umbral	1,434	5,991465	0,4882	Acepta H0
VE Bloques	8,74	5,991465	0,01265	Rechaza H0
Paramétrico "t"	9,023	5,991465	0,09685	Rechaza H0
Var y Covar	8,991	5,991465	0,01116	Rechaza H0

Fuente: Bolsa de Valores de Quito, Bloomberg

Elaboración: El autor

El test de Christoffersen *out of sample* confirma la presencia de falta de uniformidad en los excedentes del VaR en un *backtest out of sample* para el portafolio estadounidense y la presencia de uniformidad en las distribuciones de los excedentes para el portafolio ecuatoriano, fortaleciendo así la evidencia de que en Ecuador existe una ciclicidad en los valores extremos de los rendimientos que, a su vez tienden a ser menores que en el portafolio estadounidense. Este problema se fundamenta en la capacidad de los precios de las acciones de absorber la información y el comportamiento del mercado. Para solucionar el problema de la presencia de heterocedasticidad en el portafolio estadounidense se podría utilizar un modelo EGARCH (Anexo 1) para modelar la varianza de los errores y utilizando el método de *Valores Extremos con máximos sobre el umbral,* se podría tener un resultado más robusto y confiable. Por el lado del portafolio ecuatoriano la mejor opción pasaría a ser el método de *Valores Extremos con máximos sobre el umbral* sin la utilización de modeladores de varianza.

CONCLUSIONES

La medición del riesgo ha sido un problema presente en todos los campos de los negocios, la economía y las finanzas. La incertidumbre que causa la aleatoriedad de los instrumentos financieros puede afectar el comportamiento normal de los negocios y la economía. La metodología del VaR en el presente estudio ha logrado medir la pérdida máxima que podrían sufrir dos portafolios (uno de Estados Unidos y otro de Ecuador) bajo un nivel de confianza del 95%. Se utilizaron las acciones más representativas y con mayor información de estos mercados para obtener las pérdidas máximas.

El problema en la estimación del VaR reside en su forma de cálculo. Existen varios activos financieros (cada uno con sus propias características) y varios métodos de cálculo, por lo que en el presente proyecto como objetivo se buscó el modelo matemático más adecuado para el cálculo de dos portafolios de acciones para analizar el comportamiento que éstos han tenido a lo largo del tiempo. El objetivo principal se cumplió, para la comparación de modelos se plantearon los principales: Histórico, Gaussiano, Distribución *t*, Montecarlo y Valores Extremos. Los resultados dieron luces de cuál sería el mejor método y cuáles podrían funcionar en condiciones normales de mercado. En cuanto a los objetivos secundarios los modelos fueron sometidos a pruebas de *backtest* para confirmar su solidez utilizando el estadístico de Kupiec y el de Christoffersen dentro y fuera de la muestra y se encontró que dentro de ésta solo el modelo Histórico y de Valores Extremos con máximos sobre el umbral, lograron superar el test de Kupiec mientras que fuera de la muestra lograron pasar los modelos: Histórico, Montecarlo, Gaussiano y Valores Extremos.

El modelo de Valores Extremos con máximos sobre el umbral fue el mejor modelo para estimar el VaR ya que pasó las pruebas matemáticas de Kupiec confirmando la hipótesis planteada al principio de la investigación. Esto se esperaba ya que este método modela las colas de la distribución, es decir, toma directamente en su análisis los rendimientos más altos y bajos del portafolio y se centra en ellos. Mediante este método, se encontró que un inversionista con un portafolio de US$ 10.000 conformado con acciones de General Electric, IBM y Apple tiene un valor en riesgo de -2,50% (US$ 250) y una rentabilidad de 0,066% diaria; mientras que para un portafolio compuesto por acciones de La Favorita, Banco de Guayaquil y Holcim, éste pasaría a ser de -0,96% (US$ 96) y un rendimiento de 0,008% diario. Al observar la diferencia en el VaR de los portafolios y su relación con la rentabilidad se tiene que el portafolio estadounidense es más riesgoso que el ecuatoriano, pero más rentable. La selección de uno de ellos dependerá de la aversión al riesgo del inversor.

El modelo Histórico también pasó los tests, pero debido a su forma de cálculo de posición en lugar de modelar tiende a ser menos confiable por lo que se lo dejó como un método informativo más no óptimo. El modelo con distribución *t* no pasó los tests, por lo que fue descartado y los demás modelos que suponían normalidad, a excepción del de Varianzas y Covarianzas, superaron el test fuera de la muestra por lo que no pueden ser descartados como equivocados para calcular el VaR sino “menos confiables”.

En cuanto al test de Christoffersen para determinar si las máximas pérdidas se dieron en una frecuencia uniforme o formando *clusters*, se encontró que en el portafolio estadounidense ningún modelo pasó el test tanto dentro como fuera de la muestra, esto quiere decir que las máximas pérdidas no se dieron en períodos uniformes, lo que da una pauta de presencia de *clusters* de volatilidad que podrían modelarse con modelos GARCH. Para el portafolio ecuatoriano, éste pasó el test para los modelos más confiables, lo que indica que en el portafolio de acciones ecuatorianas existe una distribución uniforme de las máximas pérdidas.

Los resultados obtenidos pueden llevar a dos principales conclusiones de mercado. La primera da evidencia de una menor volatilidad en el mercado ecuatoriano que en el estadounidense, esto puede explicarse por una mayor estabilidad económica o porque el precio de las acciones en el mercado ecuatoriano no representa al mercado local. La segunda conclusión respalda en parte la primera al demostrar mediante el estadístico de Christoffersen que en el portafolio ecuatoriano existe una distribución uniforme de las máximas pérdidas que evidencia volatilidad cíclica potencialmente causada por la falta de representatividad del mercado donde los rendimientos aumentan antes de la repartición de dividendos y disminuyen después de la misma, lo que explica también una llamada distribución de colas pesadas del portafolio.

RECOMENDACIONES

- Se recomienda calcular modelos diferentes al VaR para tener una mejor noción sobre el riesgo de la inversión. Por ejemplo se tienen modelos que pueden medir otros componentes del riesgo como el *Expected* Shortfall, el VaR condicional, incremental o por componentes, el VaR promedio o el *Expected* Tail Loss (ETL).

- De los dos portafolios analizados se recomienda la elección del portafolio estadounidense porque es el que optimiza la relación riesgo rendimiento. Aunque el portafolio estadounidense sea 2,6 veces más riesgoso que el ecuatoriano, su rentabilidad es 8.3 veces mayor. Aprovechando la no linealidad de esta relación, se recomienda invertir en el portafolio estadounidense.

- Dentro del riesgo existen también variables cuantitativas o factores que deben ser tomados muy en cuenta dentro de un análisis. Factores como la cultura empresarial, el sector y el tipo de empresa pueden agregar información al análisis de riesgo y muchas veces a explicar la volatilidad de los rendimientos.

- Es importante tomar en cuenta que un mejor cálculo nace de una buena serie de datos, por lo que tener la información necesaria en un amplio período de tiempo ayuda a la predicción de los parámetros. Por esta razón al momento de calcular el VaR se debe ordenar en un principio la información de la serie bruta de la mejor manera posible y con la mayor cantidad de datos disponibles.

- En cuanto a los problemas técnicos de cálculo se podría modelar de una forma más realista las funciones de distribución marginales de las series para obtener valores más reales, por ejemplo utilizar modelos derivados como cópulas. También utilizar modelos de corrección de heterocedasticidad como los modelos GARCH, EGARCH o TGARCH para la mejor confianza y predicción del VaR ya que encontró evidencias de que las máximas pérdidas no se dieron de forma uniforme y pueden relacionarse con series que no cumplen el supuesto de homocedasticidad.

BIBLIOGRAFÍA

- Alexander, C. (2009). *Market Risk Analysis: Value at Risk Models.* New York: John Wiley and Sons.
- Baca, A. (1997). La administración de riesgos financieros. *Ejecutivos de finanzas No 11*, 20.
- Bali, T. (2003). An extreme value approach to estimating volatility and value at risk. *Journal of Business*, 1-76.
- Bank, J. M. (1995). *Risk Metric Technical Manual.* New York: J.P Morgan.
- Beder, T. (1995). *VAR: Seductive But Dangerous.* Londres: Financial Analysts Journal.
- Best, P. (1998). *Implementing Value at Risk. EE.UU.* New York: John Wiley & Sons.
- Blanck, L., & Tarquin, A. (1996). *Ingeniería Económica.* McGraw Hill.
- Bollersley, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 307-327.
- Christoffersen, P. (1998). Evaluating Interval Forecasts. *International Economics Review*, 841-862.
- Christoffersen, P., & Pelletier, D. (2004). Backtesting Value-at-Risk: A Duration-Based Approach. *Journal of Financial Econometrics*, 84-108.
- Coles, S. (2001). *An introduction to statistical modeling of extreme values.* Denver: Springer Verlag.
- Diz, E. (2004). *Introducción a la teoría de riesgo.* Bogotá: Ecoe-Global.

- Dowd, K. (1998). *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management.* New York: John Wiley & Sons.

- Elizondo, C. (2003). *Medición integral del riesgo de crédito.* Madrid: Limusa.

- Embrechts, P., Hoing, A., & A, J. (2002). *Using Copulae to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risks.* Zurich: Department of Mathematics ETHZ.

- Engle, F. (1982). Autoregressive Conditional Heterocedasticity whit Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 987-1008.

- Evans, J., & Archer, S. (1968). *Diversification and the reduction of dispersion: an empirical analysis.* California: Journal of finance.

- Franke, J., Hardle, W., & Stahl, G. (2004). *Measuring Risk in complex stochastic systems.* Berlin: Kaiserslautern.

- Garriaga, P. (2006). *Volatilidad en Mercados Financieros: .* Mendoza: Cuyo.

- Gonsalez, J. (2003). *Mezcla de activos financieros comunes para evaluación de proyectos.* Madrid: International Investment.

- Gonzales, J. (2003). *Mezcla de activos financieros comunes para evaluación de proyectos.* Madrid: International Investment.

- Gujarati, D., & Porter, D. (2010). *Econometría.* Madrid: Mcgraw Hill.

- Hansen, P., & Lunde, A. (2006). Consistent ranking of volatility models. *Journal of Econometrics*, 97-121.

- Haro, A. (2008). *Medición y control de riesgos financieros.* México DF: Limusa.

- J.P.Morgan. (1996). *RiskMetrics-Technical Document.* J.P Morgan.

- Jorion, P. (1997). *In defence of VaR.* California: Derivatives Strategy.

- Jorion, P. (2004). *Value at Risk: el nuevo paradigma para el control de riesgos con derivados.* Mexico: Limusa.

- Jorion, P. (2006). *Value at Risk: the new brenchmark for managing financial risk.* New York: Mc Graw-Hill.

- Jorrion, P. (2000). *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market.* New York: McGraw-Hill.

- Kleiber, C., & Kotz, S. (2003). *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences.* New York: Wiley.

- Kolman, J., Onak, M., & all, e. (1998). Roundtable: The limits of Models. *Derivatives Strategy*, 10-35.

- Lara, A. (2002). *Medición y control de riesgos financieros.* Ciudad de Mexico: Limusa.

- Linsmeier, J., & Pearson, N. (1996). *Risk Measurement: an introductio to Value at Risk.* Illinois: University of Illinois.

- Linsmeier, T., & Pearson, N. (1996). *Risk Measurement: An introduction to Value at Risk.* Illinois: University of Illinois.

- Lintner, I. (1965). The evaluation of risk assets and the selection of risk investment in stock portfolio and capital bufgets. *Journal of finance*, 13-37.

- Mandelbrot, B., & Hudson, R. (2004). *Fractales y finanzas.* Barcelona: Tusquets.

- Markowitz, H. (1987). *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets.* Oxford: Basil Blackwell.

- Marquez, M. (1996). *Modelo para la medición del riesgo de mercado.* Santiago de Chile: Universidad de los Andes.

- Melo, F., & Becerra, O. (2005). *Banco de la República de Colombia.* Recuperado el 1 de Abril de 2014, de http://www.banrep.gov.co/documentos/seminarios/pdf/VaR_ES_Melo_Becerra.pdf

- Mexico, B. d. (23 de Mayo de 2010). *Banco de México*. Recuperado el 1 de Abril de 2014, de http://www.banxico.org.mx/sistema-financiero/material-educativo/basico/fichas/indicadores-financieros/%7BB22F2DA4-55B2-F16E-FA06-CC3273F07379%7D.pdf

- Monge, J. (2003). *Evaluación del uso de la metodología valor en riesgo como elemento de medición y administración de riesgo de mercado de los fondos de pención obligarotios en Costa Rica.* San José: Editorial Universidad de Costa Rica.

- Mossin, I. (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica*, 768-783.

- Nelson, D. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: a New Approach. *Econometrica*, 347-370.

- Novales, A., & García, D. (1993). Guía para la estimación de modelos ARCH. *Estadística Española*, 5-38.

- Otárola, C. (2001). *Aplicación de la teoría del "Valor en Riesgo" a títulos del sector público.* San José: UCR-FUNDEPOS.

- Penza, P., & Bansal, V. (2001). *Measuring Market Risk with Value at Risk. EE.UU.* New York: John Wiley & Sons.

- Ponn, S., & Granger, C. (2003). Forescasting Volatility in Finantial Markets: A Review. *Journal of Economic Literature*, 478-539.

- Porter, M. (1990). The competitive advantage of nations. *Hardvard Business Review*, 20-30.

- Ramirez, J. (2004). Usos y limitaciones de los procesos estocásticos. *Revista de análisis económicio*, 51-76.

- Schwert, G. (1989). *Why does Stock Market Volatility Change Over Time?* California: Journal of finance.

- Sharpe, W. (1964). Capital assets prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of finance*, 425-442.

- Stavroyiannis, S., & Zarangas, L. (2013). Out of Sample Value-at-Risk and Backtesting with the Standardized Pearson Type-IV Skewed Distribution. *PANOECONOMICUS*, 231-247.

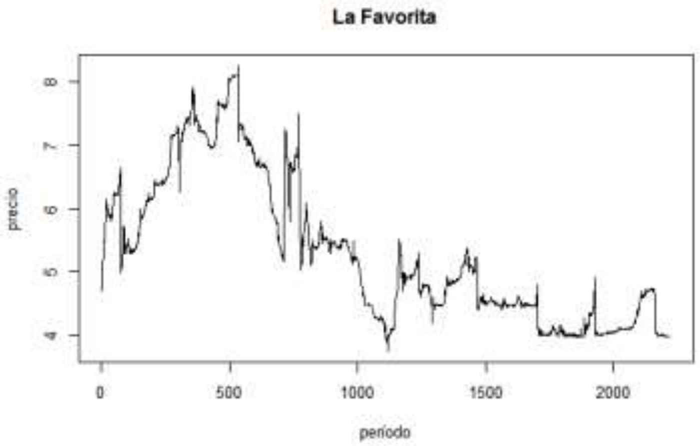
- Taleb, N. (2007). *The Black Swan: The impact of the highly improbable.* New York: Random House.

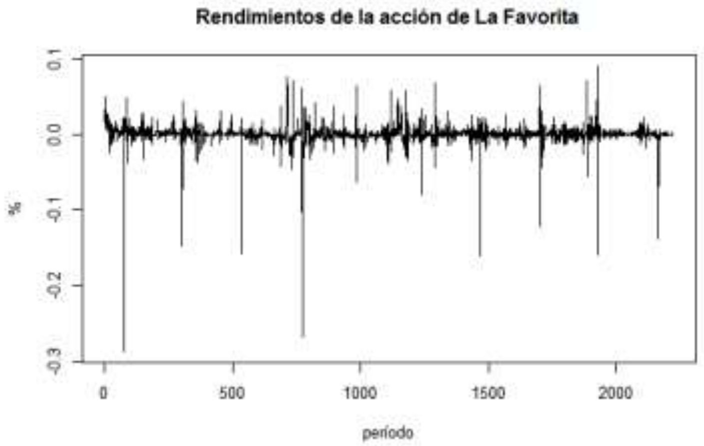
- Van Horner, J. (2002). *Fundamentos de administración financiera*. México DF: Pearson.

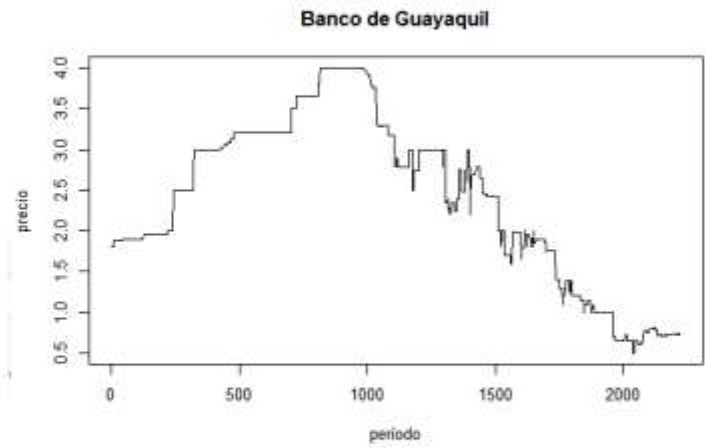
- Zakoian, J. (1994). Threshold heteroskedestic models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 931-955.

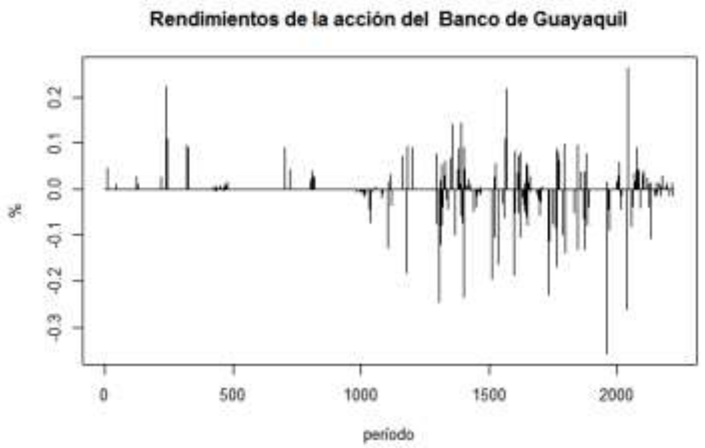
ANEXO 1

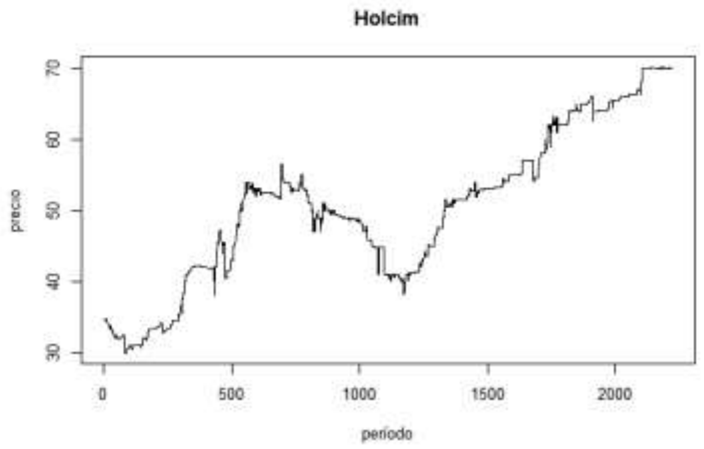
Portafolio Ecuatoriano

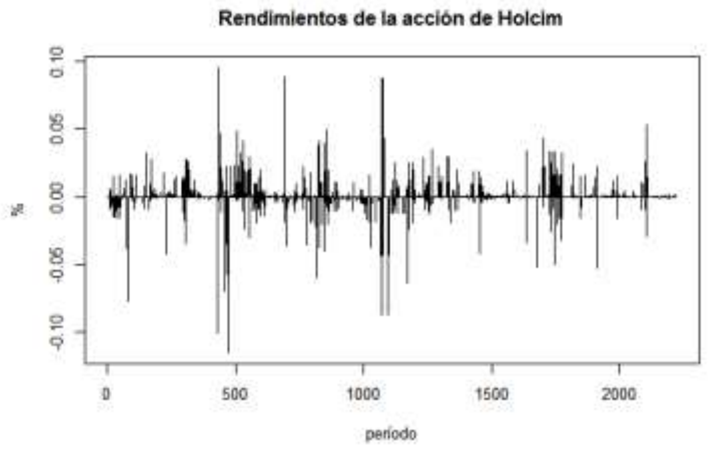


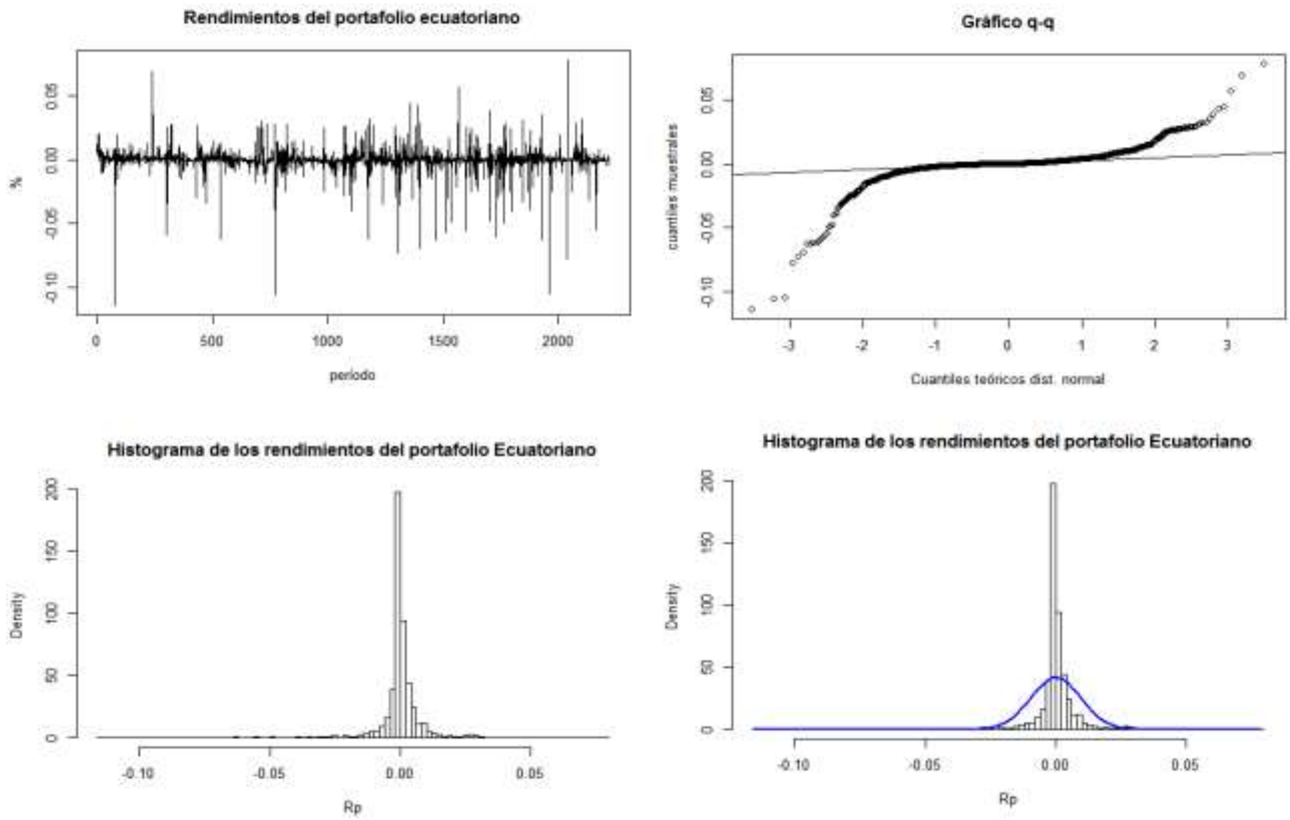




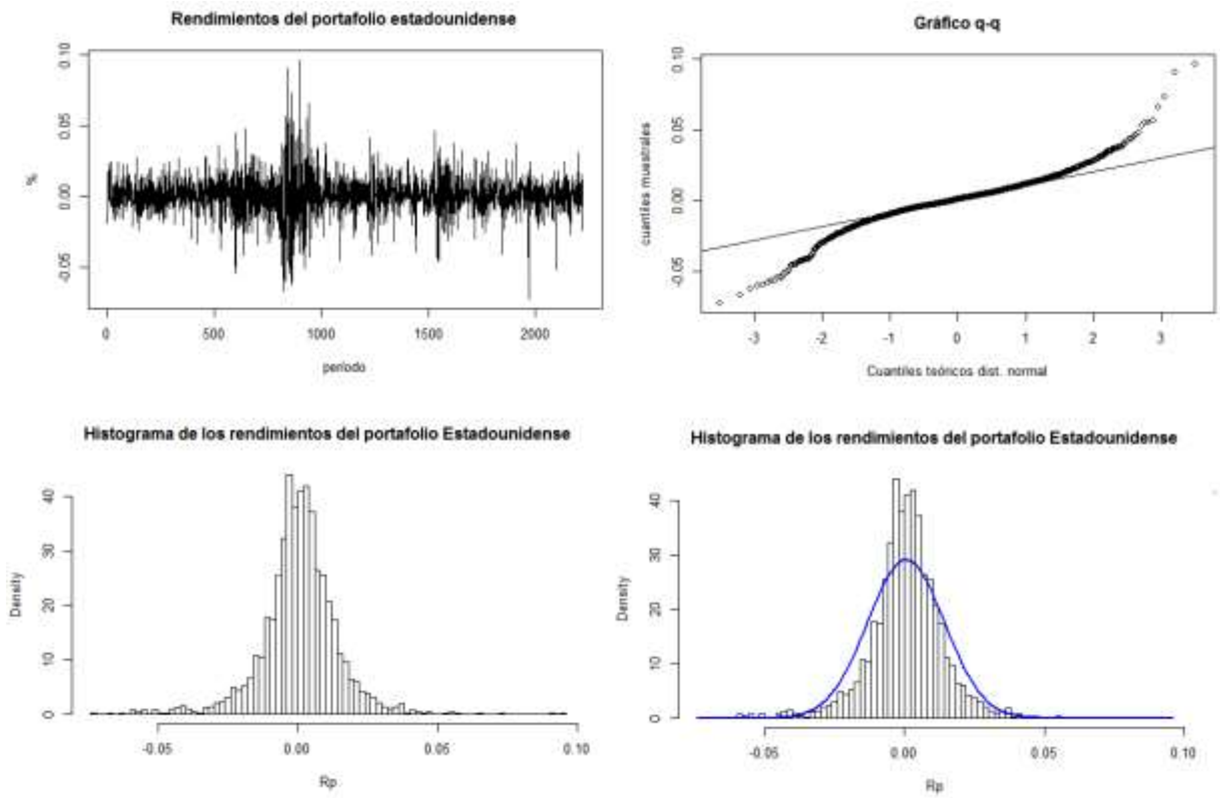


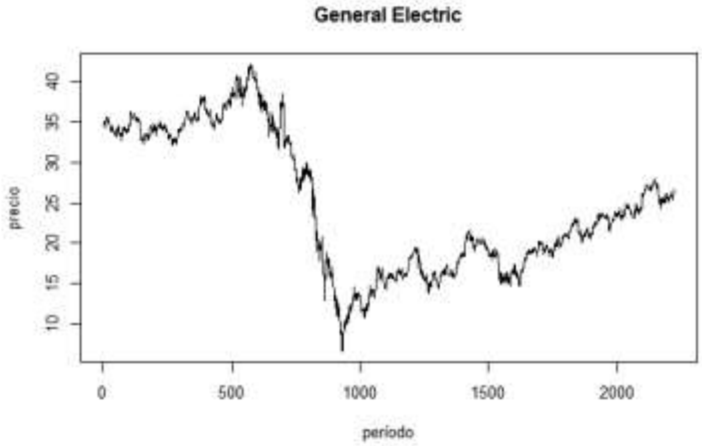


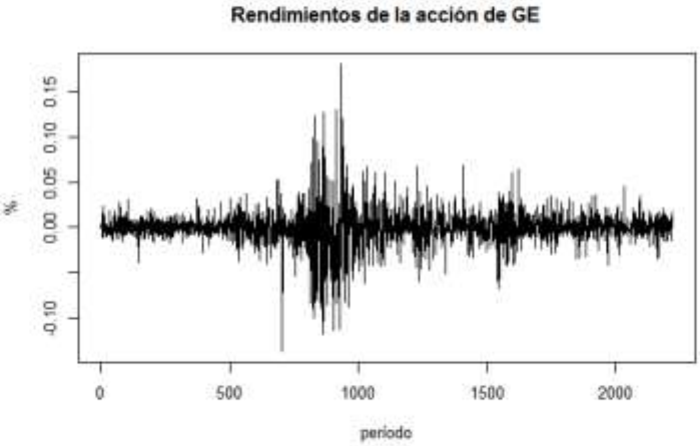


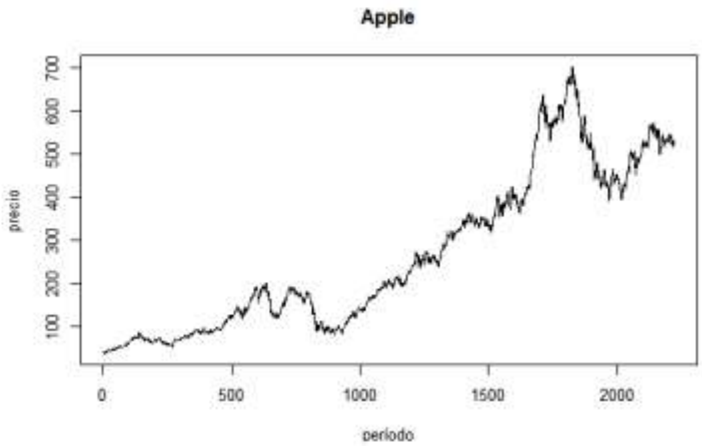


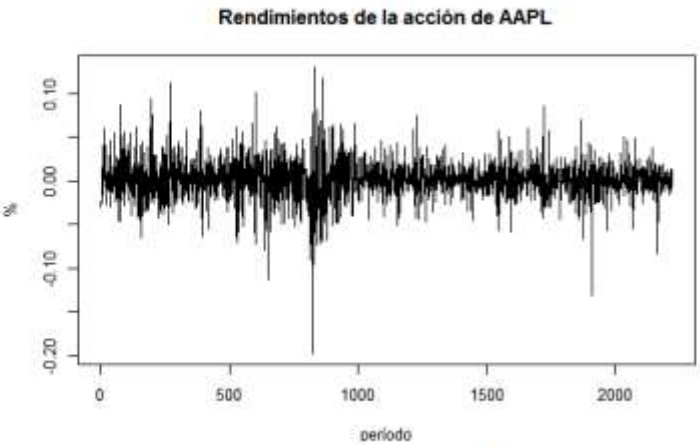
Portafolio estadounidense

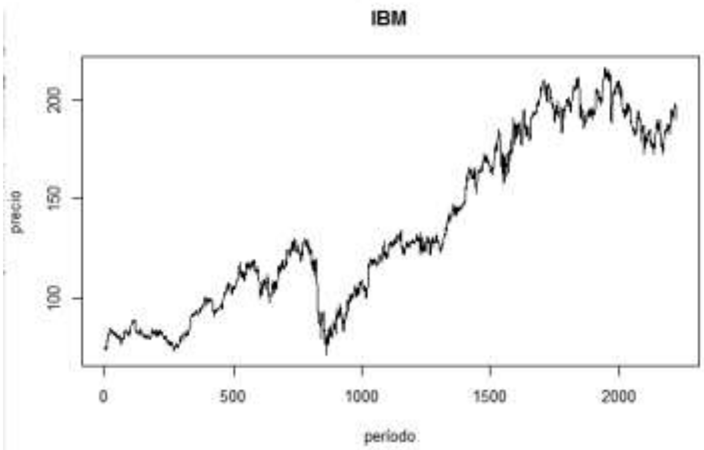


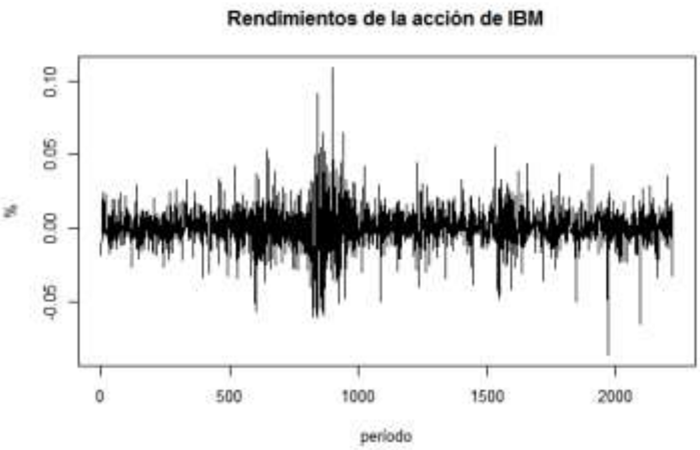

General Electric
precio
periodo


Rendimientos de la acción de GE
%
periodo


Apple
precio
periodo


Rendimientos de la acción de AAPL
%
periodo


IBM
precio
periodo


Rendimientos de la acción de IBM
%
periodo

ANEXO 2

Modelo ARCH

Las proyecciones de series de tiempo financieras son útiles en la estimación de instrumentos financieros como precios de acciones, tasas de inflación y tasas de cambio, sin embargo, este tipo de modelos pueden ser utilizados también para estimar variables financieras como los depósitos o rentabilidades. La volatilidad es una de las características principales en las series de tiempo financieras y supone una limitación frente a los supuestos tradicionales, especialmente el de varianza constante. Si las series financieras no presentan homocedasticidad[10], los métodos tradicionales no son adecuados para modelar series de tiempo, por lo que debe utilizar un método diferente (Engle, 1982).

El problema de una falta de autocorrelación entre la varianza de los errores supone un problema de subestimación o sobreestimación en el modelo tradicional. El modelo ARCH (*Auto Regresive Conditional Heteroscedasticity*) creado por Engle soluciona este problema modelando la volatilidad. El método utiliza la varianza condicional a la información pasada supuesta no constante haciendo que esta dependa del cuadrado de las innovaciones pasadas. Un proceso $\{y_t\}_{t\in I}$ obedece a un modelo ARCH si:

$$y_t|\psi_{t-1} \sim N(\mu_t, h_t) \tag{1}$$

$$\mu_t = x_t\beta \tag{2}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p\varepsilon_{t-p}^2 \tag{3}$$

$$\varepsilon_t = y_t - x_t\beta \tag{4}$$

Con:

$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p \tag{5}$$

[10]Homocedasticidad: supuesto bajo modelos clásicos que toma la varianza de los errores como constante.

Donde: $y_t|\psi_{t-1}$ representa la función de densidad condicional de y_t. La media de la distribución pasa a ser μ_t conformada por x_t que es el vector de observaciones de las variables independientes y β que es un vector de parámetros desconocidos. La varianza condicionada de $y_t|\psi_{t-1}$ puede modelarse mediante h_t compuesta por los términos de error pasados al cuadrado y α que es un vector de parámetros desconocidos. Teniendo en cuenta que se quiere modelar la volatilidad ya que los errores no son homocedásticos, ε_t pasa a estar en función de la relación entre y_t y $x_t\beta$.

Se puede deducir de lo anterior que:

$$\varepsilon_t|\psi_{t-1} \sim N(0,h_t) \tag{6}$$

$$E[\varepsilon_t] = 0 \tag{7}$$

$$Var[\varepsilon_t] = \sigma_t^2 \tag{8}$$

Tomando que h_t puede modelarse mediante un proceso autoregresivo AR(p), se tiene una solución al modelo donde la varianza condicional de los errores bajo una estructura ARCH (p) es:

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_p} = Var[\varepsilon_t] \tag{9}$$

Esto supone una nueva restricción donde:

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i < 1 \tag{10}$$

Modelo GARCH

El problema de la heterocedasticidad puede modelarse con modelos ARCH, sin embargo, muchos de los instrumentos financieros o series de tiempo de depósitos tienen colas pesadas, por lo que se han creado derivaciones de este modelo. Una de las más comunes es el modelo GARCH. Este modelo es un modelo ARCH generalizado donde la varianza no depende solo de los cuadrados de las perturbaciones retrasadas *q* períodos, sino además de las varianzas condicionales de períodos anteriores retrasadas *p* períodos, (Bollersley, 1986). El modelo pasaría a tener la siguiente forma:

$$y_t|\psi_{t-1} \sim N(\mu_t,h_t) \tag{11}$$

$$\mu_t = x_t\beta \tag{12}$$

$$h_t = z_t w = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i h_{t-i} \tag{13}$$

$$\varepsilon_t = y_t - x_t\beta \tag{14}$$

Con: $p > 0, \quad q > 0, \quad \alpha_0 > 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, q, \quad \gamma_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, p$

Se debe notar que si $p = 0$, entonces el proceso sería un ARCH(q). Esta estructura nos ayuda a modelar las series de datos con presencia de heterocedasticidad y de colas pesadas características de las series de datos financieras a través de la modelación de la varianza.

Modelo EGARCH

Si bien el modelo ARCH puede ayudar a modelar la volatilidad y el modelo GARCH ayuda a modelar la volatilidad con colas pesadas, ambos tienen un problema en relación al comportamiento del mercado. Se sabe que las variaciones positivas y negativas de los retornos de instrumentos financieros como de los retiros y aumentos de los depósitos pueden tener efectos diferentes principalmente por el comportamiento del mercado relacionado con la aversión al riesgo (efecto apalancamiento) de los diferentes inversionistas o depositantes. Los modelos ARCH y GARCH al elevar al cuadrado los términos de las perturbaciones, están ponderando de la misma manera a los cambios positivos y negativos que tenga el mercado.

El modelo EGARCH surge de estas críticas (Nelson, 1991), donde se busca la fórmula para la varianza condicional de un modelo que no se comporta de manera simétrica para perturbaciones positivas y negativas, como sucede en los modelos ARCH y GARCH. El modelo EGARCH expresa otro rasgo de la volatilidad: su comportamiento asimétrico frente a las alzas y bajas de los precios de un activo financiero. Existen varios trabajos que respaldan este comportamiento (Ponn & Granger, 2003), (Hansen & Lunde, 2006) y (Novales & García, 1993).

El EGARCH modela el efecto de asimetría considerando a la función de las innovaciones z_t como variables *iid* con media 0 donde se toma en cuenta el valor de la innovación y su magnitud.

$$g(z_t) = \theta z_t + \lambda[|z_t| - E(|z_t|)] \tag{15}$$

Donde θ y λ son números reales y se diferencia los efectos positivos y negativos de la siguiente manera:

$$g(z_t) = f(x) = \begin{cases} (\theta + \lambda)z_t - \lambda E(|z_t|), & si\ z_t \geq 0 \\ (\theta - \lambda)z_t - \lambda E(|z_t|), & si\ z_t < 0 \end{cases} \tag{16}$$

Donde: $$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}}$$

Si se tiene en cuenta esto, un proceso $\{y_t\}_{t\in I}$ obedece a un modelo EGARCH si:

$$y_t|\psi_{t-1} \sim N(\mu_t, h_t) \tag{17}$$

$$\mu_t = x_t\beta \tag{18}$$

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_k g(\varepsilon_{t-1-k}) + \sum_{i=1}^{p} \gamma_k \ln(h_{t-k}) \tag{19}$$

$$\varepsilon_t = y_t - x_t\beta \tag{20}$$

Los modelos EGARCH han demostrado ser superiores a los modelos GARCH y ARCH por la captura de las respuestas asimétricas de los rendimientos, (Alexander, 2009).

Modelo TGARCH

El modelo TGARCH (*Threshold* Heteroscedastic Autoregresive Models) (Zakoian, 1994), es modelo ARCH que depende de un umbral para definir su reacción con una distribución *t* de Student. El modelo se utiliza cuando las perturbaciones siguen una distribución asimétrica, es decir, se tiene un efecto de apalancamiento donde un efecto negativo es más persistente que uno positivo. El modelo es una simple derivación de un GARCH:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \theta d_{t-1}\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 h_{t-1} \tag{21}$$

Así: $$d_{t-1} = \begin{cases} 1 & si\ \varepsilon_{t-1} > 0 \\ 0 & si\ \varepsilon_{t-1} \leq 0 \end{cases} \tag{22}$$

De esta forma se puedes ver que los valores de los residuos negativos (que corresponden a las malas noticias) representan un efecto en la varianza de $(\alpha_1 + \theta)$ mientras que las perturbaciones positivas (que corresponden a las buenas noticias) tienen solamente un efecto α_1. Esto pasaría a representar la asimetría de los errores. Por ejemplo la varianza para un TGARCH(1,1) pasaría a ser:

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1-(\alpha_1+\theta+\gamma_1)} \tag{23}$$

ANEXO 3

Códigos utilizados para el cálculo de VaR en el programa estadístico R.

```
######################CARGAR DATOS##############################

setwd("C:/Users/klaicr/Desktop/Base")

library(RODBC)

name="datosstock.xlsx"

conexion=odbcConnectExcel2007(name)

Data=sqlQuery(conexion,"select * from [datos$]",as.is=TRUE)

close(conexion)

####MODIFICAR LOS DATOS####

View(Data)

head(Data)

data<-Data[,1:3]

head(data)

data<-data[1:7896,]

ge<-data[,1]

aapl<-data[,2]
```

```
ibm<-data[,3]

install.packages("PerformanceAnalytics")

library(PerformanceAnalytics)

rtsGE<-Return.calculate(as.ts(ge), method="log")

rtsAAPL<-Return.calculate(as.ts(aapl), method="log")

rtsIBM<-Return.calculate(as.ts(ibm), method="log")

RGE<-as.data.frame(rtsGE)

RAAPL<-as.data.frame(rtsAAPL)

RIBM<-as.data.frame(rtsIBM)

rGE<-RGE[2:7896,]

rAAPL<-RAAPL[2:7896,]

rIBM<-RIBM[2:7896,]

z<-rbind(rGE, rAAPL, rIBM)

Z<-t(z)

n<-dim(Z)[2]

k<-dim(Z)[1]

R<-as.matrix(Z)

###Optimizar portafolio###

install.packages("tseries")

library(tseries)
```

```
optimizar<- portfolio.optim(R, pm = mean(R), riskless = FALSE,
                        shorts = FALSE, rf = 0.0, reslow = NULL, reshigh = NULL,
covmat = cov(R))
optimizar$pw
w<- optimizar$pw
###Rendimientos del portafolio###
Rp<-R%*%w
```

################################GRAFICOS#########################

####GRAFICOS DE GE####

```
layout(matrix(c(1,2,3,4), 2, 2, byrow=TRUE))
plot(ge, xlab = "período", ylab = "precio", main = "GE", type = "l")
plot(rGE, xlab = "período", ylab = "%", main = "Rendimientos de la acción de GE", type =
"l")
hist(rGE, nclass = 100 ,freq = FALSE, main = "Histograma de los rendimientos de la
acción de GE")
curve(dnorm(x, mean=mean(rGE), sd=sqrt(var(rGE))), to=max(rGE), col ="blue",lwd = 2,
add = TRUE)
qqnorm(rGE, main = "Gráfico q-q", xlab = "Cuantiles teóricos dist. normal",ylab =
"cuantiles muestrales")
qqline(rGE)
```

####GRAFICOS DE AAPL####

```
layout(matrix(c(1,2,3,4), 2, 2, byrow=TRUE))
```

plot(aapl, xlab = "período", ylab = "precio", main = "AAPL", type = "l")

plot(rAAPL, xlab = "período", ylab = "%", main = "Rendimientos de la acción de AAPL", type = "l")

hist(rAAPL, nclass = 100 ,freq = FALSE, main = "Histograma de los rendimientos de la acción de AAPL")

curve(dnorm(x, mean=mean(rAAPL), sd=sqrt(var(rAAPL))), to=max(rAAPL), col ="blue",lwd = 2, add = TRUE)

qqnorm(rAAPL, main = "Gráfico q-q", xlab = "Cuantiles teóricos dist. normal",ylab = "cuantiles muestrales")

qqline(rAAPL)

####GRAFICOS DE IBM####

layout(matrix(c(1,2,3,4), 2, 2, byrow=TRUE))

plot(ibm, xlab = "período", ylab = "precio", main = "IBM", type = "l")

plot(rIBM, xlab = "período", ylab = "%", main = "Rendimientos de la acción de IBM", type = "l")

hist(rIBM, nclass = 100 ,freq = FALSE, main = "Histograma de los rendimientos de la acción de IBM")

curve(dnorm(x, mean=mean(rIBM), sd=sqrt(var(rIBM))), to=max(rIBM), col ="blue",lwd = 2, add = TRUE)

qqnorm(rIBM, main = "Gráfico q-q", xlab = "Cuantiles teóricos dist. normal",ylab = "cuantiles muestrales")

qqline(rIBM)

####GRAFICOS DEL PORTAFOLIO###

```
plot(Rp,type="l",xlab="t", ylab="Niveles de rendimiento")

points(Rp,type="p",pch=19)

layout(matrix(c(1,2,3,4), 2, 2, byrow=TRUE))

plot(Rp, xlab = "período", ylab = "precio", main = "PORTAFOLIO", type = "l")

plot(Rp, xlab = "período", ylab = "%", main = "Rendimientos del portafolio", type = "l")

hist(Rp, nclass = 100 ,freq = FALSE, main = "Histograma de los rendimientos del portafolio")

curve(dnorm(x, mean=mean(Rp), sd=sqrt(var(Rp))), to=max(Rp), col ="blue",lwd = 2, add = TRUE)

qqnorm(Rp, main = "Gráfico q-q", xlab = "Cuantiles teóricos dist. normal",ylab = "cuantiles muestrales")

qqline(Rp)
```

#################CALCULO DEL VaR SERIE HISTORICA##############

```
###GE###

z.noparametricoGE<- (1)*quantile(rGE, probs = 0.05)

VaRGE<-z.noparametricoGE

###AAPL###

z.noparametricoAAPL<- (1)*quantile(rAAPL, probs = 0.05)

VaRAAPL<-z.noparametricoAAPL

###IBM###

z.noparametricoIBM<- (1)*quantile(rIBM, probs = 0.05)
```

```
VaRIBM<-z.noparametricoIBM

###PORTAFOLIO###

z.noparametricoRp<- (1)*quantile(Rp, probs = 0.05)

VaRRp<-z.noparametricoRp

Varesh<-c(VaRGE, VaRAAPL, VaRIBM, VaRRp)

###################CALCULO DEL VaR MONTECARLO###############

###Metodo 1###

attach(data)

n<-dim(Z)[2]

k<-dim(Z)[1]

R0<-1

Rhat1<-matrix(c(mean(R[,1]),mean(R[,2]),mean(R[,3])),n,1)

alpha<-.05

T<-7895

U<-matrix(c(1),k,1)

H<-diag(rep(1,k))- (1/k)*U%*%t(U)

S<- (1/(k-1))*t(R)%*%H%*%R

cs<-diag((diag(S))^(-1/2))

Rho<-cs%*%S%*%cs

A<-chol(Rho)
```

```
Z<-rnorm(n)

INC<-A%*%Z

PSM<-matrix(0,ncol=n,nrow=k)

Z<-matrix(0,ncol=n,nrow=k)

PSM[1,]<- R[1,] + (A%*%rnorm(n))

for(i in 2:(k)){

  Z[i,]<-rnorm(n)

  PSM[i,]<-R[(i-1),]+ (A%*%Z[i,])

}

RSM<-PSM%*%w

DSM<-sort(RSM)

alpha<-.05

VaRmc<-DSM[2]

###################Montecarlo método sintetizado##############

install.packages("MASS")

library(MASS)

mu<- apply(Z, 2, mean)

sigma<- cov(Z)

MC<- mvrnorm(10000, mu, sigma)

MCportfolio<- MC%*%as.matrix(w)
```

```
VaRmc<- quantile(MCportfolio, p=0.05)

###########CALCULO DEL VaR VARIANZAS Y COVARIANZAS##########

n<-dim(R)[2]

k<-dim(R)[1]

R0<-1

Rhat1<-matrix(c(mean(R[,1]),mean(R[,2]),mean(R[,3])),n,1)

alpha<-.05

T<-7895

U<-matrix(c(1),k,1)

H<-diag(rep(1,k))- (1/k)*U%*%t(U)

S<- (1/(k-1))*t(R)%*%H%*%R

Sig<-t(w)%*%S%*%w

cs<-diag((diag(S))^(-1/2))

Rho<-cs%*%S%*%cs

Q<-qnorm(alpha)

muhat<-w%*%Rhat1

shat<-sqrt(Sig)

VAR<--R0*Q*shat

############CALCULO DEL VaR POR VALORES EXTREMOS############

#################### BLOQUES ##################
```

```
install.packages("evd")

install.packages("evdbayes")

library(evd)

Rpp<- Rp*(-1)

plot(Rpp,type="l",xlab="t", ylab="Niveles de rendimiento")

points(Rpp,type="p",pch=19)

MX<-c()

for(i in 0:5){

  MX[i+1]<-max(Rpp[((5*i)+1):((5*i)+5)])

  abline(v=5*i,lty=2)

}

Est<-fgev(MX,std.err=FALSE)

theta<- as.vector(Est$estimate)

p<-.05

Xp<-theta[1]-((theta[2]/theta[3])*(1-((-log(1-p))^(-theta[3]))))

Xp

####################### UMBRAL ##################

library(evd)

Rpp<- Rp*(-1)

plot(Rpp,type="l",xlab="t", ylab="Niveles de retorno")
```

```
points(Rpp,type="p",pch=19)

abline(h=0.0253,lty=2)

PX<-Rp[Rpp>0.0253]

u<-0.0253

alpha<-.95

VX<-fpot(Rpp,0.0253,std.err=FALSE)

pate<-as.vector(VX$estimate)

chat<-length(PX)/k

VAR1<- u+((pate[1]/pate[2])*((((1-alpha)/chat)^pate[2])-1))

##########VaR PARAMETRICO############

####Gaussiano##########

valn<-qnorm(0.05)

desvn<-sd(Rp)

medn<-mean(Rp)

VaRPM<-desvn*valn+medn

####Distribucion t####

install.packages("MASS")

library(MASS)

a<-fitdistr(Rp, "t")

r<- as.data.frame(a[1])
```

```
df<- r[3,]

library(stats)

valt<- qt(0.95, df)

desvt<-sd(Rp)

medt<-mean(Rp)

VaRPT<-desvt*valt+medt

#########################BACKTEST###############################

########Backtest modelos Gaussiano e historico#############

library(PerformanceAnalytics)

library(quantmod)

library(rugarch)

library(car)

library(FinTS)

##########Backtest in sample#####

bthist<-matrix(data=-0.025274, nrow=7895, ncol=1)

VaRTest(0.05, as.numeric(Rp), as.numeric(bthist))

btgauss<-matrix(data=-0.027128, nrow=7895, ncol=1)

VaRTest(0.05, as.numeric(Rp), as.numeric(btgauss))

#########Backtest out of sample#######

options(digits=4)
```

```
n.obs = nrow(Rp)

w.e = 1000

w.t = n.obs - w.e

alpha = 0.95

# loop

backTestVaR <- function(x, p = 0.95) {

  normal.VaR = as.numeric(VaR(x, p=p, method="gaussian"))

  historical.VaR = as.numeric(VaR(x, p=p, method="historical"))

  modified.VaR = as.numeric(VaR(x, p=p, method="modified"))

  ans = c(normal.VaR, historical.VaR, modified.VaR)

  names(ans) = c("Gaussiano", "Historico", "Modified")

  return(ans)

}

# rolling

VaR.results = rollapply(as.zoo(Rp), width=w.e,

                        FUN = backTestVaR, p=0.95, by.column = FALSE,

                        align = "right")

VaR.results = lag(VaR.results, k=-1)

chart.TimeSeries(merge(Rp, VaR.results), legend.loc="topright")

violations.mat = matrix(0, 3, 5)
```

```
rownames(violations.mat) = c("Gaussiano", "Historico", "Modified")

colnames(violations.mat) = c("En1", "n1", "1-alpha", "Percent", "VR")

violations.mat[, "En1"] = (1-alpha)*w.t

violations.mat[, "1-alpha"] = 1 - alpha

###### Violaciones modelo gaussiano#######

normalVaR.violations = as.zoo(Rp[index(VaR.results), ]) < VaR.results[, "Gaussiano"]

violation.dates = index(normalVaR.violations[which(normalVaR.violations)])

# plot violations

plot(as.zoo(Rp[index(VaR.results),]), col="blue", ylab="Return")

abline(h=0)

lines(VaR.results[, "Gaussiano"], col="black", lwd=2)

lines(as.zoo(Rp[violation.dates,]), type="p", pch=16, col="red", lwd=2)

for(i in colnames(VaR.results)) {

  VaR.violations = as.zoo(Rp[index(VaR.results), ]) < VaR.results[, i]

  violations.mat[i, "n1"] = sum(VaR.violations)

  violations.mat[i, "Percent"] = sum(VaR.violations)/w.t

  violations.mat[i, "VR"] = violations.mat[i, "n1"]/violations.mat[i, "En1"]

}

violations.mat

VaR.test = VaRTest(1-0.95,
```

```
actual=coredata(Rp[index(VaR.results),]),

                    VaR=coredata(VaR.results[,"Gaussiano"]))

names(VaR.test)

###### LR test for correct number of exceedances

VaR.test[1:7]

###### LR tests for independence of exceedances

VaR.test[8:12]
```

####################Histórico####################

```
VaR.test = VaRTest(1-0.95,

actual=coredata(Rp[index(VaR.results),]),

VaR=coredata(VaR.results[,"Historico"]))

names(VaR.test)

# LR test for correct number of exceedances

VaR.test[1:7]

# LR tests for independence of exceedances

VaR.test[8:12]

## librerías##

library(PerformanceAnalytics)

library(quantmod)

library(rugarch)
```

```
}

library(car)

library(FinTS)

########################Backtest Montecarlo#################

##########Backtest in sample#########

btmontecarlo<-matrix(data=-0.0270087, nrow=7895, ncol=1)

VaRTest(0.05, as.numeric(Rp), as.numeric(btmontecarlo))

#########Backtest out of sample#######

##Crear función##

btmc <- function(x, p=0.05) {

mu<- apply(x, 2, mean)

  sigma<- cov(x)

  w<-as.matrix(c(0.4648, 0.3094, 0.2258))

  MC<- mvrnorm(10000, mu, sigma)

  MCportfolio<- MC%*%w

VaRmc<- quantile(MCportfolio, p)

ans = VaRmc

  names(ans) = "Montecarlo"

return(ans)

}

##PArametros##
```

```
options(digits=4)

n.obs = nrow(Rp)

w.e = 1000

w.t = n.obs - w.e

alpha = 0.95

# Rolling

mcVaR.results = rollapply(as.zoo(R), width=w.e,

                    FUN = btmc, p=0.05, by.column = FALSE,

                    align = "right")

mcVaR.results = lag(mcVaR.results, k=-1)

chart.timeSeries(merge(Rp, mcVaR.results), legend.loc="topright")

violations.mat1 = matrix(0, 1, 5)

rownames(violations.mat1) = "Montecarlo"

colnames(violations.mat1) = c("En1", "n1", "1-alpha", "Percent", "VR")

violations.mat1[, "En1"] = (1-alpha)*w.t

violations.mat1[, "1-alpha"] = 1 - alpha

##Violaciones Montecarlo##

mcVaR.violations = as.zoo(Rp[index(mcVaR.results), ]) < mcVaR.results[, "Montecarlo"]

mcviolation.dates = index(mcVaR.violations[which(mcVaR.violations)])

##Gráfico de las variaciones##
```

```
plot(as.zoo(Rp[index(mcVaR.results),]), col="blue", ylab="Return")

abline(h=0)

lines(mcVaR.results[, "Montecarlo"], col="black", lwd=2)

lines(as.zoo(Rp[mcviolation.dates,]), type="p", pch=16, col="red", lwd=2)

mcVaR.violations = as.zoo(Rp[index(mcVaR.results), ]) < mcVaR.results[, "Montecarlo"]

violations.mat1[, "n1"] = sum(mcVaR.violations)

violations.mat1[, "Percent"] = sum(mcVaR.violations)/w.t

violations.mat1[, "VR"] = violations.mat1[, "n1"]/violations.mat1[, "En1"]

violations.mat1

mcVaR.test = VaRTest(1-0.95,

actual=coredata(Rp[index(mcVaR.results),]),

VaR=coredata(mcVaR.results[,"Montecarlo"]))

names(mcVaR.test)

# LR test for correct number of exceedances

mcVaR.test[1:7]

# LR tests for independence of exceedances

mcVaR.test[8:12]
```

#################Backtest Varianzas y Covarianzas################

```
## librerías##

library(PerformanceAnalytics)
```

```
library(quantmod)

library(rugarch)

library(car)

library(FinTS)
```

##########Backtest in sample#########

```
#btvcv<-matrix(data=, nrow=7895, ncol=1)

VaRTest(0.05, as.numeric(Rp), as.numeric(btvcv))
```

#########Backtest out of sample#######

```
##Crear función##

btmc <- function(x, p=0.05) {

  n<-dim(x)[2]

  k<-dim(x)[1]

  w<-as.numeric(c(0.4648034, 0.3093796, 0.2258170))

  R0<-1

  Rhat1<-matrix(c(mean(x[,1]),mean(x[,2]),mean(x[,3])),n,1)

alpha<-p

  T<-k

U<-matrix(c(1),k,1)

H<-diag(rep(1,k))- (1/k)*U%*%t(U)

S<- (1/(k-1))*t(x)%*%H%*%x
```

```
  Sig<-t(w)%*%S%*%w

  cs<-diag((diag(S))^(-1/2))

  Rho<-cs%*%S%*%cs

  Q<-qnorm(alpha)

  muhat<-w%*%Rhat1

  shat<-sqrt(Sig)

  VAR<--R0*Q*shat

ans = VAR

  names(ans) = "Varianza y Covarianza"

return(ans)

}

##PArametros##

options(digits=4)

n.obs = nrow(Rp)

w.e = 1000

w.t = n.obs - w.e

alpha = 0.95

# Rolling

vcvVaR.results = rollapply(as.zoo(R), width=w.e,

                          FUN = btvcv, p=0.05, by.column = FALSE,
```

```
                    align = "right")

vcvVaR.results = lag(vcvVaR.results, k=-1)

chart.TimeSeries(merge(Rp, vcvVaR.results), legend.loc="topright")

violations.mat5 = matrix(0, 1, 5)

rownames(violations.mat5) = "Varianza y Covarianza"

colnames(violations.mat5) = c("En1", "n1", "1-alpha", "Percent", "VR")

violations.mat5[, "En1"] = (1-alpha)*w.t

violations.mat5[, "1-alpha"] = 1 - alpha

##Violaciones Varianza y Covarianza##

vcvVaR.violations = as.zoo(Rp[index(vcvVaR.results), ]) < vcvVaR.results[, "Varianza y
Covarianza"]

vcvviolation.dates = index(vcvVaR.violations[which(vcvVaR.violations)])

##Gráfico de las variaciones##

plot(as.zoo(Rp[index(vcvVaR.results),]), col="blue", ylab="Return")

abline(h=0)

lines(vcvVaR.results[, "Varianza y Covarianza"], col="black", lwd=2)

lines(as.zoo(Rp[vcvviolation.dates,]), type="p", pch=16, col="red", lwd=2)

vcvVaR.violations = as.zoo(Rp[index(vcvVaR.results), ]) < vcvVaR.results[, "Varianza y
Covarianza"]

violations.mat5[, "n1"] = sum(vcvVaR.violations)

violations.mat5[, "Percent"] = sum(vcvVaR.violations)/w.t
```

```
violations.mat5[, "VR"] = violations.mat5[, "n1"]/violations.mat5[, "En1"]

violations.mat5
vcvVaR.test = VaRTest(1-0.95,
actual=coredata(Rp[index(vcvVaR.results),]),
VaR=coredata(vcvVaR.results[,"Varianza y Covarianza"]))
names(vcvVaR.test)
# LR test for correct number of exceedances
vcvVaR.test[1:7]
# LR tests for independence of exceedances
vcvVaR.test[8:12]
##################Backtest Valores Extremos####################
################VE umbral##############
## librerías##
library(evd)
library(PerformanceAnalytics)
library(quantmod)
library(rugarch)
library(car)
library(FinTS)
```

}

##########Backtest in sample#####

```
btvalextr<-matrix(data=-0.025294, nrow=7895, ncol=1)

VaRTest(0.05, as.numeric(Rp), as.numeric(btvalextr))
```

#########Backtest out of sample#######

```
##Crear función##

btve2 <- function(x, p=0.95) {

  Rpp<- x*(-1)

  PX<-x[Rpp>0.0253]

  u<-0.0253

  VX<-fpot(Rpp,0.0253,std.err=FALSE)

  pate<-as.vector(VX$estimate)

  chat<-length(PX)/k

VaRve<- u+((pate[1]/pate[2])*((((1-p)/chat)^pate[2])-1))

  ans = VaRve

  names(ans) = "Valores Extremos"

  return(ans)

}

##PArametros##
```

```
options(digits=4)

n.obs = nrow(Rp)

w.e = 1000

w.t = n.obs - w.e

alpha = 0.95

# Rolling

veVaR.results = rollapply(as.zoo(R), width=w.e,

                 FUN = btve2, p=0.95, by.column = FALSE,

                 align = "right")

veVaR.results = lag(veVaR.results, k=-1)

##chart.timeSeries(merge(Rp, veVaR.results), legend.loc="topright")

violations.mat2 = matrix(0, 1, 5)

rownames(violations.mat2) = "Valores Extremos"

colnames(violations.mat2) = c("En1", "n1", "1-alpha", "Percent", "VR")

violations.mat2[, "En1"] = (1-alpha)*w.t

violations.mat2[, "1-alpha"] = 1 - alpha

##Violaciones Valores Extremos##

veVaR.violations = as.zoo(Rp[index(veVaR.results), ]) > veVaR.results[, "Valores
Extremos"]

veviolation.dates = index(veVaR.violations[which(veVaR.violations)])

##Gráfico de las variaciones##
```

```
plot(as.zoo(Rp[index(veVaR.results),]), col="blue", ylab="Return")

abline(h=0)

lines(veVaR.results[, "Valores Extremos"], col="black", lwd=2)

lines(as.zoo(Rp[veviolation.dates,]), type="p", pch=16, col="red", lwd=2)

veVaR.violations = as.zoo(Rp[index(veVaR.results), ]) > veVaR.results[, "Valores
Extremos"]

violations.mat2[, "n1"] = sum(veVaR.violations)

violations.mat2[, "Percent"] = sum(veVaR.violations)/w.t

violations.mat2[, "VR"] = violations.mat2[, "n1"]/violations.mat2[, "En1"]

violations.mat2

veVaR.test = VaRTest(1-0.95,

actual=coredata(Rp[index(-veVaR.results),]),

                VaR=coredata(-veVaR.results[,"Valores Extremos"]))

names(veVaR.test)

# LR test for correct number of exceedances

veVaR.test[1:7]

# LR tests for independence of exceedances


veVaR.test[8:12]
```

################VE por Bloques###################

```
## librerías##
```

```
library(evd)

library(PerformanceAnalytics)

library(quantmod)

library(rugarch)

library(car)

library(FinTS)
```

##########Backtest in sample#####

```
btbloq<-matrix(data=-0.02854, nrow=7895, ncol=1)

VaRTest(0.05, as.numeric(Rp), as.numeric(btbloq))
```

#########Backtest out of sample#######

```
##Crear función##

btveb <- function(x, p=0.95) {

  Rpp<- x*(-1)

  MX<-c()

  for(i in 0:5){

    MX[i+1]<-max(Rpp[((5*i)+1):((5*i)+5)])

    abline(v=5*i,lty=2)

  }

Est<-fgev(MX,std.err=FALSE)
```

```
theta<- as.vector(Est$estimate)
  p<-.05
  Xp<-theta[1]-((theta[2]/theta[3])*(1-((-log(1-p))^(-theta[3]))))
  ans = Xp
  names(ans) = "Valores Extremos 2"
  return(ans)
}
##PArametros##
options(digits=4)
n.obs = nrow(Rp)
w.e = 1000
w.t = n.obs - w.e
alpha = 0.95

# Rolling
vebVaR.results = rollapply(as.zoo(R), width=w.e,
                      FUN = btveb, p=0.95, by.column = FALSE,
                      align = "right")
vebVaR.results = lag(vebVaR.results, k=-1)
#chart.TimeSeries(merge(Rp, vebVaR.results), legend.loc="topright")
```

```
violations.mat4 = matrix(0, 1, 5)

rownames(violations.mat4) = "Valores Extremos 2"

colnames(violations.mat4) = c("En1", "n1", "1-alpha", "Percent", "VR")

violations.mat4[, "En1"] = (1-alpha)*w.t

violations.mat4[, "1-alpha"] = 1 - alpha


##Violaciones Valores Extremos##

vebVaR.violations = as.zoo(Rp[index(vebVaR.results), ]) > vebVaR.results[, "Valores Extremos 2"]

vebviolation.dates = index(vebVaR.violations[which(vebVaR.violations)])


##Gráfico de las variaciones##

plot(as.zoo(Rp[index(vebVaR.results),]), col="blue", ylab="Return")

abline(h=0)

lines(vebVaR.results[, "Valores Extremos 2"], col="black", lwd=2)

lines(as.zoo(Rp[vebviolation.dates,]), type="p", pch=16, col="red", lwd=2)

vebVaR.violations = as.zoo(Rp[index(vebVaR.results), ]) > vebVaR.results[, "Valores Extremos 2"]

violations.mat4[, "n1"] = sum(vebVaR.violations)

violations.mat4[, "Percent"] = sum(vebVaR.violations)/w.t

violations.mat4[, "VR"] = violations.mat4[, "n1"]/violations.mat4[, "En1"]
```

violations.mat4

vebVaR.test = VaRTest(1-0.95,

actual=coredata(Rp[index(-vebVaR.results),]),

VaR=coredata(-vebVaR.results[,"Valores Extremos"]))

names(vebVaR.test)

LR test for correct number of exceedances

vebVaR.test[1:7]

LR tests for independence of exceedances

vebVaR.test[8:12]

################Backtest distribución t##############

librerías##

library(MASS)

library(stats)

library(PerformanceAnalytics)

library(quantmod)

library(rugarch)

library(car)

library(FinTS)

##########Backtest in sample#########

}

```
btt<-matrix(data=-0.03631341, nrow=7895, ncol=1)

VaRTest(0.05, as.numeric(Rp), as.numeric(btt))
```

#########Backtest out of sample#######

```
##Crear función##

btdt <- function(x, p=0.95) {

  a<-fitdistr(x, "t")

  r<- as.data.frame(a[1])

  df<- r[3,]

  valt<- qt(p, df)

  desvt<-sd(x)

  medt<-mean(x)

VaRPT<-desvt*valt+medt

  ans = VaRPT

  names(ans) = "Distribucion t"

  return(ans)

}

##PArametros##
```

```
options(digits=4)

n.obs = nrow(Rp)

w.e = 1000

w.t = n.obs - w.e

alpha = 0.95


# Rolling

dtVaR.results = rollapply(as.zoo(Rp), width=w.e,

                          FUN = btdt, p=0.95, by.column = FALSE,

                          align = "right")

dtVaR.results = lag(dtVaR.results, k=-1)

chart.TimeSeries(merge(Rp, dtVaR.results), legend.loc="topright")

violations.mat3 = matrix(0, 1, 5)

rownames(violations.mat3) = "Distribucion t"

colnames(violations.mat3) = c("En1", "n1", "1-alpha", "Percent", "VR")

violations.mat3[, "En1"] = (1-alpha)*w.t

violations.mat3[, "1-alpha"] = 1 - alpha

##Violaciones Valores Extremos##

dtVaR.violations = as.zoo(Rp[index(dtVaR.results), ]) > dtVaR.results[, "Distribucion t"]

dtviolation.dates = index(dtVaR.violations[which(dtVaR.violations)])
```

```
##Gráfico de las variaciones##

plot(as.zoo(Rp[index(dtVaR.results),]), col="blue", ylab="Return")

abline(h=0)

lines(dtVaR.results[, "Distribucion t"], col="black", lwd=2)

lines(as.zoo(Rp[dtviolation.dates,]), type="p", pch=16, col="red", lwd=2)

dtVaR.violations = as.zoo(Rp[index(dtVaR.results), ]) > dtVaR.results[, "Distribucion t"]

violations.mat3[, "n1"] = sum(dtVaR.violations)

violations.mat3[, "Percent"] = sum(dtVaR.violations)/w.t

violations.mat3[, "VR"] = violations.mat3[, "n1"]/violations.mat3[, "En1"]


violations.mat3

dtVaR.test = VaRTest(1-0.95,

actual=coredata(Rp[index(-dtVaR.results),]),

VaR=coredata(-dtVaR.results[,"Distribucion t"]))

names(dtVaR.test)


# LR test for correct number of exceedances

dtVaR.test[1:7]

# LR tests for independence of exceedances
```

```
dtVaR.test[8:12]
```